به نام خداوند مهرورز مهرگستر

جزوه درس: تحقیق در عملیات ۱

Operation Research 1

مقطع کارشناسی رشتهٔ مهندسی صنایع

استاد درس: دکتر احمد ماکوئی

(عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه علم و صنعت ایران)

نویسندهٔ جزوه: علی چگینی

نیمسال دوم تحصیلی ۹۵-۹۴

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده مهندسی صنایع

Website: ali-chegini.com

Email: mail@ali-chegini.com

«تحقیق در عملیات ۱»

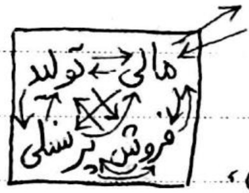
Subject: 1
Year. Month. Date. ( )

نمره

- جلسه اول ۱۱/۱۱: - منابع: کتاب برنامه‌ریزی خطی، دکتر آرین نژاد - ارزشیابی: میان ترم ۸-۶ حذفی
کتاب لیبرمن پایان ترم ۱۲-۱۴
کتاب حمدی طاها حل تمرین ۱-۲ غیر اجباری

- تاریخچه و مقدمه:

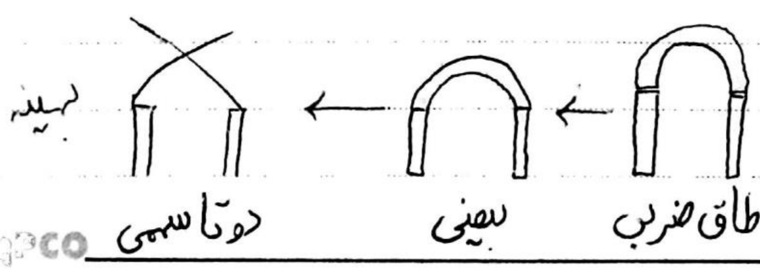
- مدیریت یعنی ایجاد هماهنگی بین اجزاء سیستم و سیستم با بیرون.



- از دید تولید، کمترین تنوع محصول و از دید فروش، بیشترین تنوع محصول، مطلوب و بهینه است درصورتی که برای بخش مالی و پرسنلی اهمیتی ندارد (بهینه‌سازی موضعی). اما مدیر باید به بهینه‌سازی کل سیستم (global) توجه کند. از ماشین پیکان (در همان پیکان که موتور پژو روی آن قرار داده شده بود.) می‌توان به عنوان محصولی که در آن به بهینه‌سازی موضعی و نه بهینه سازی کل توجه شد و نتیجه نامطلوب داشت، نام برد.

- اسم تحقیق در عملیات (operations Research (oR)) جنبه تاریخی دارد. مرکز تحقیق در عملیات در جنگ کره با آمریکا، از انگلستان به آمریکا منتقل شد.

- مثالی برای استفاده از تحقیق در عملیات: بدلیل جنگ، دربارهای تاریخی مثل تخت جمشید، تعداد زیادی ستون وجود داشت. سیر تکاملی:
(بهینه نبود.)



- در انقلاب صنعتی، ماکت سازی و مدل سازی آغاز شد. مدل سازی یک کارخانه فیزیکی نیست بلکه ریاضی است

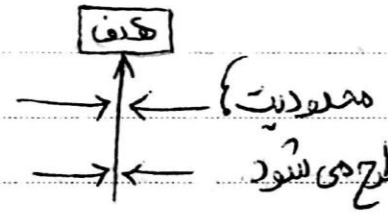
برای مثال، رهبری جنگ آمریکا با کویت، به شکل ریاضی صورت گرفت
می شود

- بزرگترین خطر در تصمیم گیری، تجربه است. - در یک شاتل فضایی، در هر ثانیه، ده هزار تصمیم گرفته

- جلسه دوم ۱۳/۱۱/۸

- مدل سازی مثل کاریکاتور کشیدن (رسم خطوط اصلی) است نه نقاشی دقیق و ظریف کشیدن. ابتدا

مدل ساخته می شود و سپس اعتبارسنجی صورت می گیرد.



- در راه رسیدن به هدف، اگر با محدودیت روبرو باشیم، آنگاه برنامه ریزی مطرح می شود

- در برنامه ریزی، تلاش برای رسیدن به جواب optimal (بهینه) است، یعنی جوابی که با توجه به شرایط

و محدودیت ها، بهترین ممکن است و منظور جواب ایده آل نیست.

- برنامه ریزی ریاضی شامل دو بخش است: ۱- متغیرهای تصمیم گیری (Decision Variables)

(متغیرهای کنترلی) ۲- پارامترها (متغیرهای غیرکنترلی) ← تغییر و کنترل دست ما نیست.

منبع: نادر

- مثال: یک شرکت تعاونی مسکن، ۵۰۰ هکتار زمین در اختیار دارد و می خواهد دو نوع ساختمان A و B

را در این زمین احداث نماید. هر ساختمان نوع A ۱/۵ هکتار و هر ساختمان نوع B، ۲/۵ هکتار مساحت دارد.

هزینه ساخت هر ساختمان نوع A، ۳ هزار واحد پول و نوع B، ۴ هزار و پانصد واحد پول می باشد. کل بودجه در دسترس اتحادیه ۱ میلیون و دویست هزار واحد پول است. سود اتحادیه از هر خانه نوع A، ۴۰۰ و هر خانه نوع B، ۸۰۰ واحد پول می باشد. اتحادیه از هر نوع خانه، چه تعداد باید تولید نماید تا بتواند سود خود را حداکثر کند؟ که مسئله را به صورت یک مدل ریاضی، فرموله نمایید. ← تبدیل به معادلات

x_A : تعداد خانه نوع A که باید ساخته شود
x_B : " " " B " " .

تابع هدف : Z یا $x_0 = 400x_A + 800x_B$

هدف : max کردن تابع هدف (سود اتحادیه)

محدودیت ها Subject to (st):

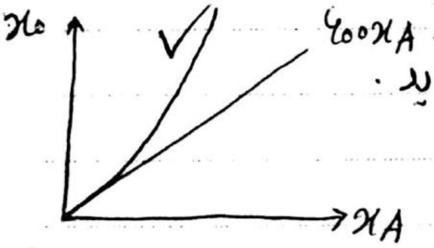
فضای جواب

زمین $0.1x_A + 0.2x_B \le 50$

بودجه $3000x_A + 4500x_B \le 1200000$

$x_A , x_B \ge 0$

- چند نکته : ۱- مدل بالا، برنامه ریزی خطی نام (Linear Programming) دارد. البته در درس های دیگر از لفظ Planning برای برنامه ریزی استفاده می شود. ۲- حالت خطی، نمود عینی و واقعی در دنیای بیرون ندارد، مثلاً می دانیم با بالا رفتن تیراژ تولید، هزینه تمام شده پایین می آید.



۳- اگر جواب ها گسسته باشند، حل سخت تر خواهد بود.

۴- می توان بعضی از قیود (قیدها) را برداشت، به این کار relax کردن می گویند.

- مثال : یک شرکت اتومبیل سازی قصد دارد، مخارج یک برنامه نیم ساعته تلویزیونی را تأمین نماید. این

برنامه، متشکل از سه بخش خواهد بود: بازی یک کمدین، ارکستر و تبلیغات. کمدین حاضر نیست بیش از ۲۰ دقیقه از برنامه را اجرا کند. شبکه تلویزیونی نیز مقرر نموده است که تبلیغات تحت هیچ شرایطی نمی‌تواند از ۱۲ دقیقه بیشتر باشد. شرکت خودروسازی نیز مایل نمی‌باشد زمان تبلیغات کمتر از ۳ دقیقه باشد. کمدین نیز نمی‌خواهد، زمان برنامه‌اش از زمان تبلیغات کمتر باشد. از ارکستر برای پر کردن زمان‌های باقی مانده استفاده خواهد شد.

تجربه نشان داده است که به ازای هر دقیقه بازی کمدین، دو هزار بیننده جدید و به ازای هر دقیقه ارکستر هزار بیننده جدید اضافه می‌شود. به ازای هر دقیقه تبلیغات، هزار نفر تلویزیون را خاموش می‌کنند. هزینه هر دقیقه کمدین ۱۵۰ واحد پول، ارکستر ۱۰۰ واحد پول و تبلیغات ۵۰ واحد پول می‌باشد. برای تعیین اینکه به هر بخش برنامه چند دقیقه زمان باید اختصاص یابد تا اهداف زیر مستقلاً تأمین گردند، مسئله را فرموله نمایید: الف) حداکثر بیننده جذب شود ب) برنامه در حداقل هزینه ساخته شود.

الف) $x_0 = 2000x_1 + 1000x_2 - 1000x_3$

x_1: زمان اختصاص یافته به کمدین (دقیقه)

x_2: زمان اختصاص یافته به ارکستر (دقیقه)

x_3: زمان اختصاص یافته به تبلیغات (دقیقه)

$$
st: \begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\
x_1 \leq 20 \\
x_3 \leq 12 \\
x_3 \geq 3 \\
x_1 - x_3 \geq 0 \quad (x_1 \geq x_3) \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

هدف: Max کردن x_0

ب) $x_0 = 150x_1 + 100x_2 + 50x_3$

همان محدودیت های قسمت الف را داریم.

هدف: min کردن x_0

منطقاً، در قسمت الف، x_1 بیشترین و x_3 کمترین است و در قسمت ب، برعکس.

- چند نکته: ۱- متغیرهای مشابه را زیر هم می نویسیم. ۲- اعداد را سمت راست و متغیرها را سمت چپ می نویسیم.

۳- محدودیت ها منعکس کننده واقعیت های سیستم است. ۴- تابع هدف منعکس کننده خواسته تحلیل گر است.

۵- اغلب افزایش منابع، پرهزینه تلقی می شود. ۶- محدودیت ها { روی سیاست گذاری / روی منابع } در مدل ریاضی مهم تر است.

- مثال: سه شرکت تعاونی مزرعه ۱، ۲ و ۳ که دارای زمین های قابل کشت و سهمیه آب مخصوص به خود هستند، باهم تشکیل یک اتحادیه را داده اند. چغندر قند، دانه های روغنی و پنبه تنها محصولاتی هستند که در این ناحیه کشت می شوند. این محصولات در میزان بازدهی و آب مورد نیاز با یکدیگر متفاوت می باشند. جدول زیر میزان زمین و سهمیه آب هر شرکت تعاونی را نشان می دهد. جدول دوم، محصولات قابل کشت و اطلاعات مربوط به آنها را نشان می دهد. لازم به ذکر است که وزارت کشاورزی سهمیه ای برای هر محصول برای اتحادیه تعیین کرده است. برای رعایت عدالت، این سه شرکت قبول کرده اند که دقیقاً متناسب با زمین خود، زمین به زیر کشت ببرند. هر شرکت مجاز است هر ترکیب دلخواه از محصولات را کشت نماید. با استفاده از یک مدل برنامه ریزی خطی و با هدف حداکثر شدن سود اتحادیه، تعیین نمایید که هر شرکت چه مقدار زمین به کشت هر محصول باید اختصاص دهد؟

شرکت تعاونی	زمین (هکتار)	سهمیه آب (واحد آب)	محصول	حداکثر سهمیه (هکتار)	واحد آب مصرفی در هکتار	سود واحد پول در هکتار
۱	۸۰	۱۲۰	چغندر قند	۱۲۰	۳	۴
۲	۱۲۰	۱۶۰	پنبه	۱۰۰	۲	۳
۳	۶۰	۷۵	دانه های روغنی	۶۵	۱	۱

Subject: ۶
Year. Month. Date. ( )

x_{ij} : مقدار زمینی که شرکت i به کشت محصول j اختصاص می دهد. (هکتار)

$x_{ij} \geq 0$ ($i = 1,2,3$ و $j = 1,2,3$) . در نوشتن مدل ریاضی، استفاده از متغیرهای دو اندیسی، بسیار رایج است

شرکت تعاونی \ محصول	چغندرقند (1)	پنبه (2)	دانه های روغنی (3)
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

$$\text{Max } x_0 = 4(x_{11}+x_{21}+x_{31}) + 3(x_{12}+x_{22}+x_{32}) + 1(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

St:

محدودیت های زمین

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 80 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 120 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 60 \end{cases}$$

محدودیت سهمیه آب

$$\begin{cases} 3x_{11}+2x_{12}+1x_{13} \leq 120 \\ 3x_{21}+2x_{22}+x_{23} \leq 160 \\ 3x_{31}+2x_{32}+x_{33} \leq 75 \end{cases}$$

محدودیت های منابع

محدودیت های وزارت کشاورزی

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 120 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 100 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 65 \end{cases}$$

محدودیت های سیاست گذاری

$$\frac{x_{11}+x_{12}+x_{13}}{80} = \frac{x_{21}+x_{22}+x_{23}}{120} = \frac{x_{31}+x_{32}+x_{33}}{60}$$

دوتا معادله رو در نظر می گیریم

$$\begin{cases} 3x_{11}+3x_{12}+3x_{13}-2x_{21}-2x_{22}-2x_{23}=0 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}-2x_{31}-2x_{32}-2x_{33}=0 \end{cases}$$

- جلسه سوم ۱۸/۱۱ :

- مدل های قطعی :
  - برنامه ریزی خطی (LP) Linear Programming
  - برنامه ریزی اعداد صحیح (ILP) Integer Programming (هم بانه) مشابه خطی
  - برنامه ریزی غیرخطی (NLP) Non Linear Programming
  - برنامه ریزی صفر و یک Zero-one Programming (بودن یا نبودن)
  - برنامه ریزی پویا Dynamic Programming

ali-chegini.com mail@ali-chegini.com

_ مثال:

max $x_0 = 4x_1 + 3x_2$

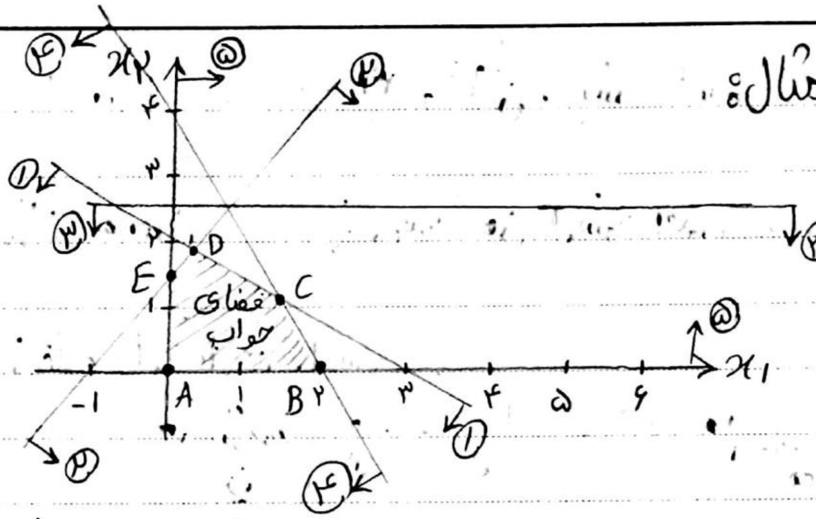
St: $2x_1 + 3x_2 \le 6$ (1)

$-3x_1 + 2x_2 \le 3$ (2)

$2x_2 \le 5$ (3)

$2x_1 + x_2 \le 4$ (4)

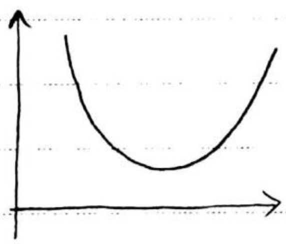
$x_1, x_2 \ge 0$ (5)



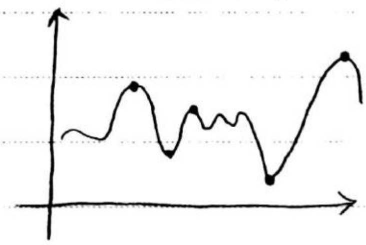
$A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(3/2, 1)$, $D(\frac{3}{13}, \frac{\ }{13})$, $E(0, 3/2)$

جواب های بدست آمده از ۱ تا ۴ را solution گویند ولی با درنظر گرفتن ۵، Feasible solution (حل قابل قبول حل شدنی) گویند.

جواب اشتراک تعدادی نیم صفحه ی محدب است که خود یک نیم صفحه محدب بوده درنتیجه جواب بهینه مطلق است.
(convex)



Convex
جواب:
global optimum
(کلی)



Non_convex
جواب:
Local optimum
(موضعی)

_ جواب ها می توانند روی نقاط گوشه های فضای جواب باشند. جاگذاری نقاط در x_0:

جواب بهینه

$A \to x_0 = 0$, $B \to x_0 = 8$, $\boxed{C \to x_0 = 9}$, $D \to x_0 = \frac{84}{13} \approx 6.5$, $E \to x_0 = \frac{9}{2} = 4.5$

_ مثال: دو معدن ۱ و ۲ سنگ آهن استخراج شده ی خود را به سه کارخانه فولادسازی ۱ و ۲ و ۳ ارسال می نمایند.

به دلیل بعد مسافت و نوع جاده هزینه انتقال هر تن سنگ آهن از هر معدن به هر کارخانه متفاوت است. معدن ۱

قادر است روزانه حداکثر ۱۰۳ تن و معدن ۲ حداکثر روزانه ۱۹۷ تن سنگ آهن عرضه نماید.

حداقل تقاضای روزانه سه کارخانه فولادسازی به ترتیب ۷۱، ۱۳۳ و ۹۶ تُن می باشد. با استفاده از مدل برنامه ریزی خطی تعیین نمایید که روزانه از هر معدن به هر کارخانه چند تن سنگ آهن حمل شود تا ضمن برآورده شدن محدودیت های مسئله مجموع هزینه های حمل و نقل حداقل شود؟

معدن \ کارخانه	هزینه های حمل و نقل (هر تن) ۱	۲	۳	حداکثر عرضه (تن)
۱	۹	۱۶	۲۸	۱۰۳
۲	۱۴	۲۹	۱۹	۱۹۷
حداقل تقاضا (تن)	۷۱	۱۳۳	۹۶	

x_{ij} : مقدار سنگ آهن (تن) که روزانه از معدن i به کارخانه j حمل می گردد.

همیشه یک محدودیت زمان در آنها مستتر است.

معدن \ کارخانه	۱	۲	۳
۱	x_{11}	x_{12}	x_{13}
۲	x_{21}	x_{22}	x_{23}

$$\min x_0 = 9x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 14x_{21} + 29x_{22} + 19x_{23}$$

این نوع مسائل که به مسائل حمل و نقل معروفند دارای دو محدودیت تقاضا و عرضه هستند.

St:

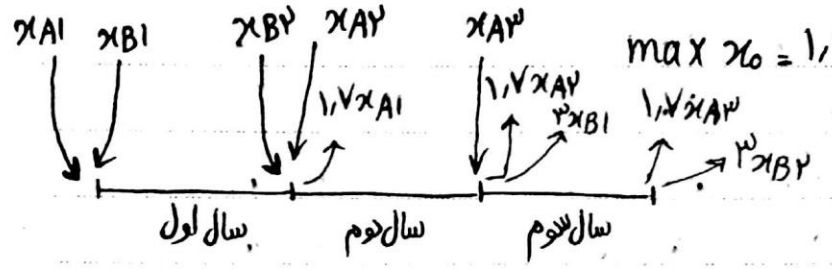
محدودیت های عرضه
$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 103 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 197 \end{cases}$$

محدودیت های تقاضا
$$\begin{cases} x_{11}+x_{21} \ge 71 \\ x_{12}+x_{22} \ge 133 \\ x_{13}+x_{23} \ge 96 \end{cases}$$

$x_{ij} \ge 0$ $(i=1,2)$ $(j=1,2,3)$

مثال: سرمایه گذاری می تواند پولش را در دو طرح سرمایه گذاری کند. طرح A دارای عایدی ۷۰٪ در سال و طرح B دارای عایدی ۲۰۰٪ در هر دو سال می باشد. اگر افق سرمایه گذاری ۳ سال باشد و کل پول در دسترس ۱۰۰ واحد باشد. مسأله را با هدف حداکثر نمودن عایدی در پایان سال سوم فرموله نمایید.

- جلسه چهارم ۲۰،۲،۱۴۰۰



$$\max x_0 = 1.7x_{A1} + 1.7x_{A2} + 1.7x_{A3} + 3x_{B2}$$

$$st: x_{A1} + x_{B1} = 100000$$

$$x_{A2} + x_{B2} \le 1.7x_{A1} \ , \ x_{A3} \le 1.7x_{A2} + 3x_{B1} \ , \ x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2} \ge 0$$

- مثال: یک تولیدکننده لوازم خانگی، ۴ نوع محصول تولید می نماید. سیستم تولید شامل ۵ دپارتمان پرس کاری، مته کاری، مونتاژ، تکمیل (finishing) و بسته بندی است. سرعت تولید هر یک از ۴ محصول در این ۵ دپارتمان متفاوت بوده و مطابق جدول زیر می باشد. جدول زیر اطلاعات مربوط به محصولات را ارائه می نماید. در محصولات ۱ و ۴ از یک ورق فلزی مخصوص استفاده می گردد که تنها ۲ هزار واحد از آن در هفته در دسترس می باشد. هر عدد محصول ۱ نیاز به ۲ واحد از این ورق و هر عدد محصول ۴ نیاز به ۱/۲ واحد از این ورق دارد. بهترین ترکیب تولید را در هفته چگونه ای تعیین نمایید که سود خالص ماکزیمم گردد؟

دپارتمان	سرعت تولید (واحد محصول در ساعت) 1	2	3	محصول 4	ظرفیت تولید (ساعت) در هفته
پرس کاری	0.03	0.15	0.05	0.1	400
مته کاری	0.06	0.12	-	0.1	400
مونتاژ	0.05	0.1	0.05	0.12	500
تکمیل	0.04	0.2	0.03	0.12	450
بسته بندی	0.02	0.06	0.02	0.05	400

محصول	قیمت فروش (واحد پول)	هزینه تولید (واحد پول)	توان فروش در هفته حداقل	حداکثر
1	10	6	1000	6000
2	25	15	-	5000
3	16	11	500	3000
4	20	14	100	1000

$$\max x_0 = (10-6)x_1 + (25-15)x_2 + (16-11)x_3 + (20-14)x_4$$

x_i: تعداد واحد تولیدی از محصول i در هفته $(i = 1,2,3,4)$

(مدل تولید ترکیبی)

$$s.t.\begin{cases} 0/03x_1+0/15x_2+0/05x_3+0/1x_4 \le 400 & \text{برشکاری} \\ 0/06x_1+0/12x_2+0/1x_4 \le 400 & \text{مته کاری} \\ 0/05x_1+0/1x_2+0/05x_3+0/12x_4 \le 500 & \text{مونتاژ} \\ 0/04x_1+0/2x_2+0/03x_3+0/12x_4 \le 450 & \text{تکمیل} \\ 0/02x_1+0/06x_2+0/02x_3+0/05x_4 \le 400 & \text{بسته بندی} \\ 2x_2+1/2x_4 \le 2000 & \text{ورق فلزی} \end{cases}$$

$x_1 \ge 1000$
$x_1 \le 6000$
$x_2 \le 500$
$x_3 \ge 500$
$x_3 \le 3000$
$x_4 \ge 100$
$x_4 \le 1000$, $x_2 \ge 0$

- مثال ۶: یک طرح تولید محصول شیمیایی، می تواند با ۲ روش مختلف و با ترکیب مواد خام R_1 و R_2 . محصولات Q_1 و Q_2 را تولید نماید. روش اول با ترکیب ۷ تن از R_1 و ۵ تن R_2 می تواند ۲ تن Q_1 و ۶ تن Q_2 در یک روز تولید نماید. روش دوم با ترکیب ۵ تن R_1 و ۸ تن R_2 می تواند ۵ تن Q_1 و ۴ تن Q_2 را در یک روز تولید نماید. تقاضای Q_1 و Q_2 حداقل ۱۰۰ و ۱۲۰ تن در روز می باشد. به علت اختلاف دو روش تولید، سود خالص روزانه حاصل از فروش روش اول ۳۰۰۰ واحد پول و روش دوم ۴۰۰۰ واحد پول می باشد: موجودی R_1 و R_2 به ترتیب ۳۵۰ و ۴۰۰ تن می باشد. با هدف حداکثر نمودن سود مسئله را فرموله نمایید.

$R_1, R_2 \rightarrow Q_1, Q_2$

روش اول $\begin{cases} 7t & R_1 \\ 5t & R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t & Q_1 \\ 6t & Q_2 \end{cases}$

Q_1	Q_2
$\downarrow$ 100	$\downarrow$ 120

روش دوم $\begin{cases} 5t & R_1 \\ 8t & R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5t & Q_1 \\ 4t & Q_2 \end{cases}$

R_1	R_2
$\downarrow$ 350t	$\downarrow$ 400t

x_1: تعداد روز بکارگیری روش اول

x_2: تعداد روز بکارگیری روش دوم

$$\max\ x_0 = 3000x_1 + 4000x_2$$

$$\text{st:}\ 7x_1+5x_2 \leq 350 \quad (R_1)$$
$$5x_1+8x_2 \leq 400 \quad (R_2)$$
$$2x_1+5x_2 \geq 100 \quad (Q_1)$$
$$6x_1+4x_2 \geq 120 \quad (Q_2)$$
$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

- مثال: یک کارخانه کاغذ سازی، رول های استاندارد ۲۰۰ اینچی تولید می نماید. برای برآوردن نیاز مشتری، این رول استاندارد، باید به عرض های کوچک تری بریده شود. عرض مورد سفارش مشتریان از پریودی به پریود دیگر تغییر می یابد. فرض کنید در یک پریود زمانی، مشتری نیاز دارند ۵۰۰ عدد رول ۴۵ اینچی، ۳۰۰ عدد رول ۲۴ اینچی و ۲۰۰ عدد رول ۶۰ اینچی از کاغذ می باشد. با استفاده از یک مدل ریاضی، برنامه ای برای برش رول های استاندارد ارائه نمایید بطوریکه کمترین دور ریز را داشته باشیم. اگر رول بیش از نیاز مشتری تولید گردد نیز دور ریز محسوب خواهد شد.

عرض	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۴۵	۰	۰	۱	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۴
۲۴	۰	۳	۱	۵	۳	۲	۰	۸	۶	۴	۲	۰
۶۰	۳	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰
دور ریز	۲۰	۸	۱۱	۲۰	۲۳	۲	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰

روش های مختلف برش

x_i: تعداد رول استانداردی که باید با روش iام برش زده شود.

$$\min x_0 = 20x_1+8x_2+11x_3+20x_4+23x_5+2x_6+5x_7+8x_8+11x_9+14x_{10}+17x_{11}+20x_{12}+45s_1+24s_2+60s_3$$

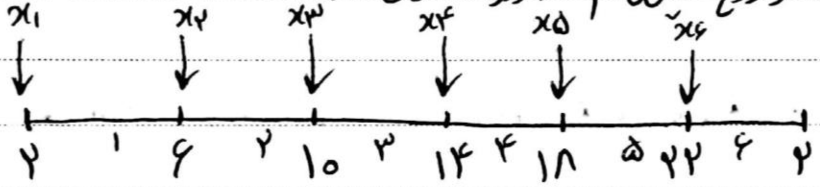
$$\begin{cases} x_3 + x_5 \\ 3x_2+x_3+5x_4+3x_5 \\ 3x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5 \\ s_1, s_2, s_3, x_1, \dots, x_{12} \geq 0 \end{cases}$$

- مثال: یک رستوران شبانه روزی حداقل تعداد خدمتکار مورد نیاز را برای ساعات مختلف شبانه روز به صورت زیر ارائه نموده است. اگر هر خدمتکار

ساعت	۲-۶	۶-۱۰	۱۰-۱۴	۱۴-۱۸	۱۸-۲۲	۲۲-۲
حداقل تعداد	۴	۸	۱۰	۷	۱۲	۴

۸ ساعت بطور متوالی کار کند، با یک مدل ریاضی، حداقل تعداد خدمتکاری را که این رستوران باید استخدام نماید را بدست آورید.

- جلسه پنجم ۲۵/۱۱: x_i: تعداد افرادی که در شروع سیکل iام کار خود را آغاز می کنند



$$\min x_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$
\begin{aligned}
s.t.:\ & x_1 + x_2 \geq 8 \\
& x_2 + x_3 \geq 10 \\
& x_3 + x_4 \geq 7 \\
& x_4 + x_5 \geq 12 \\
& x_5 + x_6 \geq 4 \\
& x_1 + x_6 \geq 4
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$

این مسئله مدل پایه برای زمان بندی در پرستاران و ... است.

- برنامه ریزی تولید و برنامه ریزی موجودی، دو روی یک سکه هستند.

- مثال: یک انبار تنها می تواند صد واحد از یک کالا را ذخیره نماید. هزینه انبارداری برای هر واحد کالا در هر فصل (یا مطابق) برابر یک واحد پول می باشد. در هر فصل قیمت خرید معادل قیمت فروش می باشد و مطابق جدول زیر داده شده است

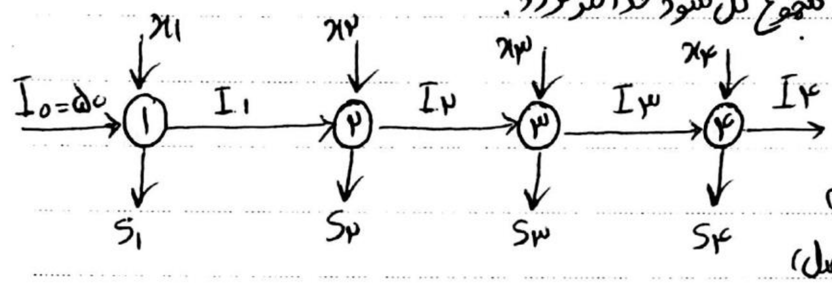
ادامه پیدا نمی کند ←

فصل	۱	۲	۳	۴
قیمت	۱۰	۱۲	۸	۹

هزینه های متعارف

- هزینه انبارداری ← خوابیدن سرمایه ← نرخ بهره سرمایه گذاری

با این فرض که در ابتدای فصل اول ۵۰ واحد کالا در انبار موجود می‌باشد، با استفاده از مدل ریاضی، یک برنامه خرید و فروش برای هر فصل بگونه‌ای بنویسید که مجموع کل سود حداکثر گردد.



I_i: موجودی در ابتدای فصل $(i+1)$

x_i: مقدار خرید در فصل i ام (ابتدای فصل)

s_i: مقدار فروش در فصل i ام (انتهای فصل)

$$\max x_0 = \left[(10s_1+12s_2+8s_3+9s_4)\right] - \left[(10x_1+12x_2+8x_3+9x_4)+(50+I_1+I_2+I_3+I_4)\right]$$

- عدد ثابت، در تابع هدف هیچ تأثیری ندارد.

↓ معادلات تعادلی ↓

$$st: \begin{cases} I_1 \leq 100 \\ I_2 \leq 100 \\ I_3 \leq 100 \\ I_4 \leq 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} 50+x_1 = s_1+I_1 \\ I_1+x_2 = s_2+I_2 \\ I_2+x_3 = s_3+I_3 \\ I_3+x_4 = s_4+I_4 \end{cases} \qquad I_j, x_j, s_j \geq 0$$

مثال: سه نوع هواپیما که از لحاظ اندازه با یکدیگر متفاوت اند، می‌بایستی به ۴ مسیر گوناگون تخصیص یابد. جدول زیر حداکثر ظرفیت هر هواپیما برحسب تعداد مسافر و تعداد هواپیماهای موجود از هر نوع و تعداد پروازهای روزانه‌ای که هر هواپیما در یک مسیر معین می‌توانند انجام دهد و نیز اطلاعات مسافران را نشان می‌دهد:

نوع هواپیما	ظرفیت (مسافر)	تعداد هواپیما	تعداد پروازهای روزانه در هر مسیر ۱	۲	۳	۴
۱	۵۰	۵	۳	۲	۲	۱
۲	۳۰	۸	۴	۳	۳	۲
۳	۲۰	۱۰	۵	۵	۴	۲
تعداد روزانه مسافران			۱۰۰۰	۲۰۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰

نوع هواپیما	هزینه هر پرواز در هر مسیر ۱	۲	۳	۴
۱	۱۰۰۰	۱۱۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰
۲	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰
۳	۶۰۰	۶۰۰	۸۰۰	۹۰۰
زیان	۴۰	۵۰	۴۵	۷۰

هزینه هر پرواز در هر مسیر در جدول زیر داده شده است. اگر مسافری برای پروازی مراجعه نماید و برای وی بلیت موجود نباشد، سود از دست رفته شرکت به عنوان زیان تلقی شده که در جدول زیر نشان داده شده است. با استفاده از مدل برنامه ریزی خطی و با هدف حداقل نمودن مجموع هزینه ها، مسئله را فرموله نمایید.

x_{ij} : تعداد هواپیمای نوع i ام که به مسیر j ام اختصاص می یابد.

$$\min x_0 = \left[1000 \times 3x_{11} + 1100 \times 2x_{12} + 1200 \times 2x_{13} + 1500 \times x_{14} + \dots + 900 \times 2x_{34}\right] + \left[40 s_1 + 50 s_2 + 45 s_3 + 70 s_4\right]$$

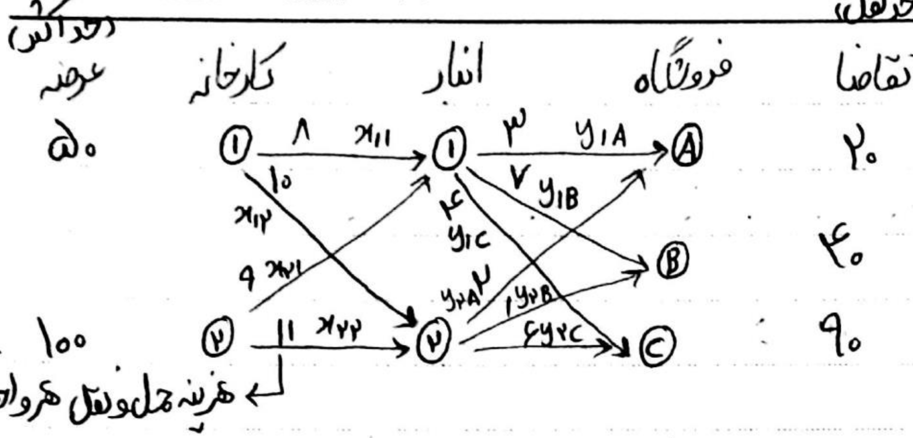
$$St: \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \leq 5 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \leq 8 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \leq 10 \end{cases}$$

$$3 \times 50 x_{11} + 6 \times 30 x_{21} + 5 \times 20 x_{31} \leq 1000$$

$$\to \begin{cases} 3 \times 50 x_{11} + 6 \times 30 x_{21} + 5 \times 20 x_{31} + S_1 = 1000 \\ 2 \times 50 x_{12} + 3 \times 30 x_{22} + 5 \times 20 x_{32} + S_2 = 2000 \\ 2 \times 50 x_{13} + 3 \times 30 x_{23} + 4 \times 20 x_{33} + S_3 = 900 \\ 1 \times 50 x_{14} + 2 \times 30 x_{24} + 2 \times 20 x_{34} + S_4 = 1200 \end{cases}$$

- اگر علاوه بر تعداد هواپیما ها، تعداد پرواز در هر مسیر هم مجهول باشد، مسئله را مجدداً فرموله نمایید.

- مثال: یک شرکت دارای دو کارخانه، دو انبار و سه فروشگاه می باشد. این شرکت هر ماه محصولات خود را به انبارها منتقل نموده و از آنجا به فروشگاه ها توزیع می کند. هزینه نقل و انتقال و میزان عرضه و تقاضا در شکل زیر نشان داده شده اند. فرض کنید محدودیت ظرفیت انبار نداریم. با هدف حداقل نمودن هزینه‌ها، مسئله را مدل سازی کنید.



x_{ij}: تعداد کالایی که از کارخانه i به انبار j حمل می‌گردد.

y_{ij}: مقدار کالایی که از انبار i به فروشگاه j حمل می‌گردد.

$$\min x_0 = 8x_{11} + 10x_{12} + 9x_{21} + 11x_{22} + 3y_{1A} + 7y_{1B} + 4y_{1C} + 2y_{2A} + y_{2B} + 6y_{2C}$$

St:
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 50 \\ x_{21} + x_{22} \leq 100 \end{cases} \quad \begin{cases} y_{1A} + y_{2A} \geq 20 \\ y_{1B} + y_{2B} \geq 40 \\ y_{1C} + y_{2C} \geq 90 \end{cases} \quad x_{ij}, y_{ij} \geq 0 \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = y_{1A} + y_{1B} + y_{1C} \\ x_{21} + x_{22} = y_{2A} + y_{2B} + y_{2C} \end{cases}$$

← اگر ۱۰٪ ضایعات داشته باشیم، معادلات تعادلی را مجدداً بنویسید.

$$\begin{cases} 1.1\,(x_{11} + x_{21}) = y_{1A} + y_{1B} + y_{1C} \\ 1.1\,(x_{21} + x_{22}) = y_{2A} + y_{2B} + y_{2C} \end{cases}$$

- جلسه ششم ۲۷، ۱۱: - مثال: یک کارخانه ریخته‌گری تولیدکننده آلیاژهای فلزی، بنا به سفارش مشتری می‌بایست آلیاژی متشکل از ۳۰٪ سرب، ۳۰٪ روی و ۴۰٪ قلع تولید نماید. این کارخانه برای تولید آلیاژ جدید از همزوج کردن شمش‌های موجود در بازار استفاده می‌کند. در حال حاضر ۹ نوع شمش با ترکیبات فلزی مختلف و قیمت‌های متفاوت در بازار موجود هستند.

می‌خواهیم با استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی خطی تعیین نماییم که چه درصدی از هر نوع شمش، می‌باید برای تولید آلیاژ جدید ۱ کیلوگرم بکار گرفته شود، به گونه‌ای که قیمت تمام شده آلیاژ حداقل گردد؟ x_i: مقدار شمش i ام (کیلو) که در تولید آلیاژ بکار رود.

$$\min x_0 = 4.1x_A + 4.3x_B + 5.8x_C + 6x_D + 7.6x_E + 7.5x_F + 7.3x_G + 6.9x_H + 7.3x_I$$

↑ Blending (امتزاج) ↑

شمش	A	B	C	D	E	F	G	H	I	آلیاژ درخواستی
سرب	۱۰	۱۰	۴۰	۶۰	۳۰	۳۰	۳۰	۵۰	۲۰	۳۰
روی	۱۰	۳۰	۵۰	۳۰	۳۰	۴۰	۲۰	۴۰	۳۰	۳۰
قلع	۸۰	۶۰	۱۰	۱۰	۴۰	۳۰	۵۰	۱۰	۵۰	۴۰
	(درصد)									
قیمت هر کیلو	۴٫۱	۴٫۳	۵٫۸	۶	۷٫۶	۷٫۵	۷٫۳	۶٫۹	۷٫۳	

$$
St: \begin{cases}
0.1x_A+0.1x_B+0.4x_C+0.6x_D+0.3x_E+0.3x_F+0.3x_G+0.5x_H+0.2x_I=0.3\times 1\\
0.1x_A+0.3x_B+0.5x_C+0.3x_D+0.3x_E+0.4x_F+0.2x_G+0.4x_H+0.3x_I=0.3\times 1\\
0.8x_A+0.6x_B+0.1x_C+0.1x_D+0.4x_E+0.3x_F+0.5x_G+0.1x_H+0.5x_I=0.4\times 1
\end{cases}
$$

$$x_A+x_B+x_C+x_D+x_E+x_F+x_G+x_H+x_I=1$$

$$x_A, x_B, x_C, \dots, x_H, x_I \geq 0$$

- مثال: سه شهر فاضلاب های خود را از طریق تأسیسات فاضلاب به درون یک رودخانه می ریزند. هر یک از تأسیسات تصفیه فاضلاب، دارای یک حداکثر راندمان می باشند که نمی تواند از ۹۵٪ بیشتر باشد (میزان از بین بردن آلودگی).

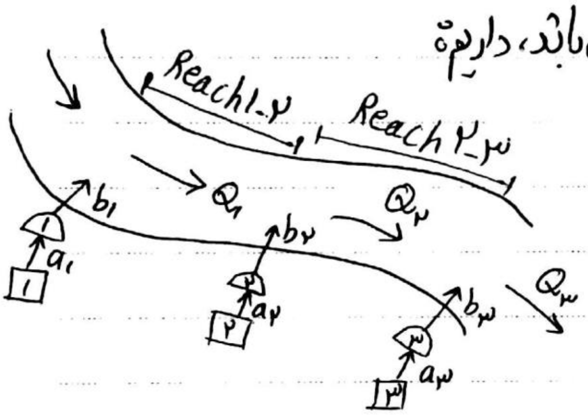
هزینه عملیات تصفیه، تناسب مستقیم با مقدار راندمان تاسیسات مربوطه دارد. قوانین محیط زیست حداقلی را برای میزان کیفیت آب رودخانه تعیین نموده اند. می خواهیم با استفاده از مدل سازی ریاضی میزان راندمان هر یک از تأسیسات فاضلاب را به گونه ای تعیین نماییم که ضمن مراعات قوانین زیست محیطی، مجموع کل هزینه ها حداقل گردد.

- تعاریف:

- یک مقدار اندازه استاندارد برای میزان آلودگی BOD می باشد. (Biochemical oxygen Demand)

که به معنای وزن اکسیژن مورد نیاز برای تصفیه آب آلوده می باشد، هر قدر BOD بیشتر باشد به معنا آلودگی بیشتر آب است.

تأسیسات تصفیه آب، مقدار BOD را از آب آلوده تصفیه کرده و هرچه راندمان تأسیسات بالاتر باشد، میزان BOD حذف شده از آب آلوده بیشتر خواهد بود. علاوه بر تأسیسات تصفیه فاضلاب، عوامل طبیعی نیز قادر می باشند آلودگی آب را کاهش دهند، یکی از این عوامل، جریان آب رودخانه می باشد. در این مثال فرض کنید که دبی جریان آب و نیز طول مسیر طی شده توسط آلودگی در میزان کاهش طبیعی آلودگی ها موثر می باشد، داریم:



x_j: راندمان تأسیسات تصفیه شهر j ام

a_j: مقدار BOD تخلیه شده از شهر j به تصفیه خانه j (پوند در روز)

b_j: مقدار BOD تصفیه شده از تصفیه خانه j به رودخانه

r_{jk}: مقدار درصد BOD باقیمانده از شهر j به k (مقدار BOD حذف شده توسط فرآیند طبیعی $(1-r_{jk})$ می باشد.)

B_j: BOD (پوند بر گالن) حداکثر BOD مجاز در فاصله j به $j+1$ Q_j: (گالن در روز) مقدار دبی رودخانه در فاصله j تا $j+1$

c_j: هزینه حذف هر گالن BOD در تصفیه خانه j ام $b_j=(1-x_j)a_j$

$$\min x_0 = c_1a_1x_1 + c_2a_2x_2 + c_3a_3x_3$$

$$\text{st:}\quad \underbrace{(1-x_1)a_1}_{b_1} \le B_1 . Q_1$$

$$(1-x_2)a_2 + r_{12}\overline{(1-x_1)a_1} \le B_2 . Q_2$$

$$(1-x_3)a_3 + r_{23}(1-x_2)a_2 + r_{13}(1-x_1)a_1 \le B_3 . Q_3$$

$$\begin{cases} x_j \le 0.95 \\ x_j \ge 0 \end{cases} \quad j=1,2,3$$

- سوال کوئیز: یک شرکت دارویی ادعا می کند که قادر است سرماخوردگی را با استفاده از قرص های ۳ لایه خود درمان نماید. این قرص ها در دو اندازه موجود است: اندازه معمولی شامل ۲ گرم آسپرین، ۵ گرم بی کربنات و ۱ گرم کدئین می باشد. اندازه بزرگ شامل ۱ گرم آسپرین، ۸ گرم بی کربنات و ۱ گرم کدئین است. اگر یک بیمار برای درمان

سرما خوردگی اش نیازمند حداقل ۱۲ گرم آسپرین، ۷۴ گرم بی کربنات و حداکثر ۲۴ گرم کدئین باشد، با استفاده از یک مدل برنامه ریزی تعیین نمایید، حداقل تعداد قرص را که یک بیمار در کل باید مصرف نماید، چقدر است؟

اندازه \ مقدار	آسپرین	بی کربنات	کدئین
معمولی	۲	۵	۱
بزرگ	۱	۸	۱

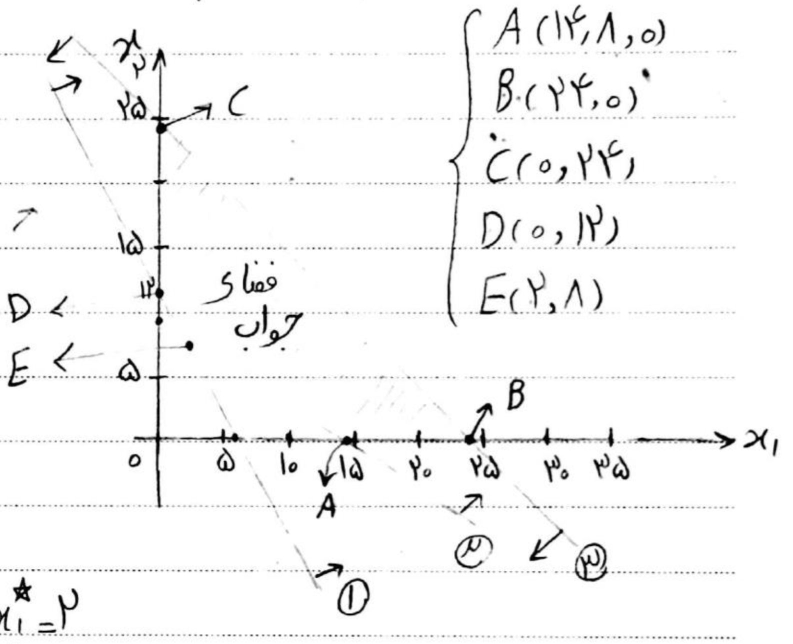
x_1: تعداد قرص مصرفی از اندازه معمولی

x_2: تعداد قرص مصرفی از اندازه بزرگ

$$\min x_0 = x_1 + x_2$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

$$st: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 & (1) \text{ آسپرین} \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 & (2) \text{ بی کربنات} \\ x_1 + x_2 \leq 24 & (3) \text{ کدئین} \end{cases}$$



$$\begin{cases} A(14.8, 0) \\ B(24, 0) \\ C(0, 24) \\ D(0, 12) \\ E(2, 8) \end{cases}$$

جاگذاری در x_0:

$A \to x_0 = 14.8$

$B \to x_0 = 24$

$C \to x_0 = 24$

$D \to x_0 = 12$

$E \to x_0 = 10$ ✓ $\Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 8 \end{cases}$ و $\min x_0 = 10$

- جلسه هفتم ۱۲/۲: نمونه‌ای از فرم کلی یک برنامه ریزی خطی:

$$\max x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$st: \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

- فرم کانونیک: $\Longrightarrow$

$$\max x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

- فرم ماتریسی:

$$\max x_0 = \underbrace{(c_1, c_2, \dots, c_n)}_{\text{بردار ضرایب تابع هدف}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{بردار متغیرها}}$$

بردار سمت راست

$$\text{st:} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &\max x_0 = CX \\ &\text{st: } AX \leq b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned}$$

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)^T \geq 0$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- ویژگی های فرم کانونیک برنامه ریزی خطی عبارت اند از: ۱- تابع هدف بصورت max می باشد. ۲- محدودیت ها همگی کوچکتر یا مساوی هستند. ۳- تمام متغیرها غیرمنفی می باشند.

- مثال: تبدیل به فرم کانونیک:

1) $\min x_0 = 3x_1 - 6x_2 + x_3$

$\max -x_0 = -3x_1 + 6x_2 - x_3 \to \max x_0' = -3x_1 + 6x_2 - x_3$

2) $2x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 8 \to -2x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -8$

3) $6x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 10 \to \begin{cases} 6x_1 - 8x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ 6x_1 - 8x_2 + 6x_3 \geq 10 \end{cases} \to \begin{cases} 6x_1 - 8x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ -6x_1 + 8x_2 - 6x_3 \leq -10 \end{cases}$

4) $|6x_1 + 10x_2 - 3x_3| \leq 15$

$\to \begin{cases} 6x_1 + 10x_2 - 3x_3 \leq 15 \\ 6x_1 + 10x_2 - 3x_3 \geq -15 \end{cases} \to \begin{cases} 6x_1 + 10x_2 - 3x_3 \leq 15 \\ -6x_1 - 10x_2 + 3x_3 \leq 15 \end{cases}$

$x_j \leq 0 \Rightarrow x'_j = -x_j \Rightarrow x'_j \geq 0$

- اگر متغیری بطور کامل، یک متغیر غیرمثبت باشد (کوچکتر یا مساوی صفر باشد)، در این صورت می توان با تغییر متغیر $x_j = -x'_j$ و جایگزین نمودن x'_j در تمام مدل به جای x_j، حوالت روش کانونیک را بجا آورد ولی اگر متغیر x_j، متغیر آزاد در علامت باشد، می بایستی بیکی از دو ترتیب زیر عمل نمود: ۱- یکی از روش ها این است که متغیر آزاد در علامت، در یکی از محدودیت ها، برحسب دیگر متغیرها بدست آمده و سپس در کل مدل حذف می گردد.

۲- روش دوم که کاربرد بیشتری دارد، بدین صورت است که متغیر آزاد در علامت بصورت تفاضل دو متغیر غیرمنفی نوشته شده و این تغییر متغیر در کل مدل برنامه ریزی خطی رعایت می گردد.

$x = x^+ - x^-$

$x^+, x^- \geq 0$ یا $x = u - v$ آزاد x (freeinsign)

- مثال: مدل برنامه ریزی خطی زیر را به فرم کانونیک تبدیل نمایید.

$$\min x_0 = 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4$$
$$St: 9x_1 + 11x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 8$$
$$x_1 - 4x_3 + 2x_4 \leq 25$$
$$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
آزاد x_4

(۱)
$$\min x_0 = 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4^+ - 6x_4^-$$
$$St: 9x_1 + 11x_2 - x_3 + 5x_4^+ - 5x_4^- \geq 8$$
$$x_1 - 4x_3 + 2x_4^+ - 2x_4^- \leq 25$$
$$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4^+ + x_4^- = 12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4^+, x_4^- \geq 0$$

(۲)
$$\max x'_0 = -3x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4^+ + 6x_4^-$$
$$St: -9x_1 - 11x_2 + x_3 - 5x_4^+ + 5x_4^- \leq -8$$
$$x_1 - 4x_3 + 2x_4^+ - 2x_4^- \leq 25$$
$$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4^+ + x_4^- \leq 12$$
$$-8x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4^+ - x_4^- \leq -12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4^+, x_4^- \geq 0$$

- نکته: در فرم کانونیک، منفی شدن سمت راست محدودیت ها، مشکلی ایجاد نمی کند.

- یکی دیگر از اشکال ظاهری مدل های برنامه ریزی خطی، فرم استاندارد نام دارد که تنها زمانی به کار می رود که بخواهیم مدل برنامه ریزی خطی را با روش سیمپلکس (simplex) حل کنیم. ویژگی های فرم استاندارد: ۱- تمامی محدودیت ها به جز محدودیت علامت متغیرها، باید به شکل تساوی باشند. ۲- سمت راست تمامی محدودیت ها باید غیرمنفی باشد. ۳- تمام متغیرها باید غیرمنفی باشند. ۴- تابع هدف می تواند max یا min باشد.

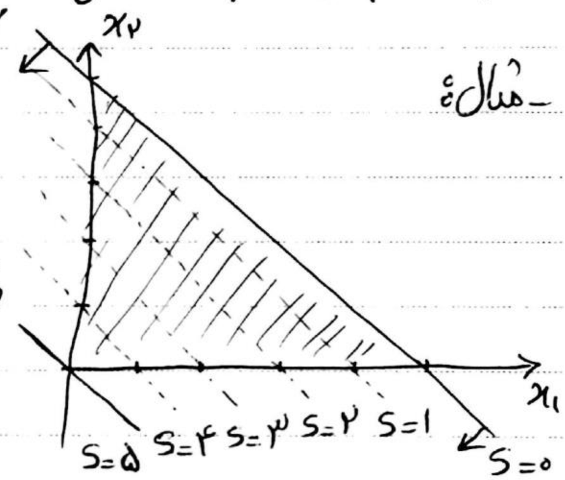
- مثال:

1) $x_1, x_2 \ge 0$, $x_1 + x_2 \le 5 \rightarrow x_1 + x_2 + S = 5$

$x_1, x_2, S \ge 0$

slack variable (متغیر کمکی/کمبود)

فضا همچنان دو بعدی است زیرا S به x_1 و x_2 وابسته است.



2) $x_1 + x_2 \ge 5 \rightarrow x_1 + x_2 - S = 5$

$x_1, x_2, S \ge 0$ → surplus variable (متغیر اضافی)

چرا غلط؟ نقض شرط سمت راست فرم استاندارد ← $x_1 + x_2 \ge 5 \rightarrow -x_1 - x_2 \le -5 \rightarrow -x_1 - x_2 + S = -5$

x_1, x_2 و $S \ge 0$

- مثال: مدل برنامه ریزی خطی زیر را به فرم استاندارد تبدیل نمایید.

$$\min x_0 = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

st: $x_1 + x_2 + x_3 \le 40$

$x_1 + 9x_2 - 7x_3 \ge 50$

$5x_1 + 3x_2 = 20$

$|5x_2 + 8x_3| \le 100$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_3 آزاد

$x_3 = x_3^+ - x_3^-$ $\quad \min x_0 = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3^+ - 7x_3^-$

$$
\begin{aligned}
\text{st: } & x_1 + x_2 + x_3^+ - x_3^- \leq 40 \\
& x_1 + 9x_2 - 7x_3^+ + 7x_3^- \geq 50 \\
& 5x_1 + 3x_2 = 20 \\
& 5x_2 + 8x_3^+ - 8x_3^- \leq 100 \\
& -5x_2 - 8x_3^+ + 8x_3^- \leq 100 \\
& x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \min x_0 = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3^+ - 7x_3^-
$$

$$
\begin{aligned}
\text{st: } & x_1 + x_2 + x_3^+ - x_3^- + s_1 = 40 \\
& x_1 + 9x_2 - 7x_3^+ + 7x_3^- - s_2 = 50 \\
& 5x_1 + 3x_2 = 20 \\
& 5x_2 + 8x_3^+ - 8x_3^- + s_3 = 100 \\
& -5x_2 - 8x_3^+ + 8x_3^- + s_4 = 100 \\
& x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

- تمرین ۱: مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را الف) به فرم کانونیک ب) به فرم استاندارد، تبدیل نمایید.

$$
\begin{aligned}
\min x_0 = {} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
\text{st: } & x_1 + x_2 - x_3 \geq -5 \\
& -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 15 \\
& |19x_1 - 7x_2 + 5x_3| \leq 13 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \quad x_3 \text{ آزاد}
\end{aligned}
$$

- تمرین ۲: نشان دهید که m معادله زیر با $m+1$ نامعادله‌ی زیر معادل است. (جواب‌هایشان با هم یکسان است.)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i$$

جلسه هشتم ۲۴/۲/۱۴۰۲ _ مثال:

$\max x_0 = 4x_1 + 3x_2$

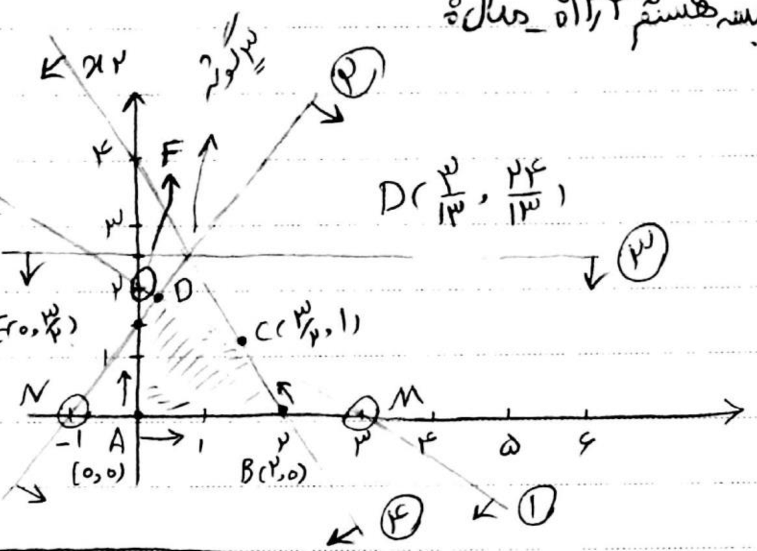
$st: \; 2x_1 + 3x_2 \le 6$

$-3x_1 + 2x_2 \le 3$

$2x_2 \le 5$

$2x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 , x_2 \ge 0$



$A \rightarrow x_0 = 0$

$B \rightarrow x_0 = 8$

$C \rightarrow x_0 = 9$

$D \rightarrow x_0 = \frac{12}{13} + \frac{72}{13} = \frac{84}{13}$ $\quad E \rightarrow x_0 = \frac{9}{2}$ $\quad \rightarrow x_1^* = \frac{3}{2} , x_2^* = 1$ و $x_0^* = 9$

تبدیل به فرم استاندارد: $\max x_0 = 4x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$ $\quad$ مثلاً: $B(x_2 = 0 , S_4 = 0)$

$st: \; 2x_1 + 3x_2 + S_1 = 6$ ①

$-3x_1 + 2x_2 + S_2 = 3$ ②

$2x_2 + S_3 = 5$ ③

$2x_1 + x_2 + S_4 = 4$ ④

$x_1 , x_2 , S_1 , S_2 , S_3 , S_4 \ge 0$

1) $x_1 = 0 , x_2 = 0$

$(S_1 = 6, S_2 = 3, S_3 = 5, S_4 = 4) \rightarrow \boxed{A}$

2) $x_2 = 0 , S_4 = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + S_1 = 6 \\ -3x_1 + S_2 = 3 \\ S_3 = 5 \\ 2x_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2 , x_2 = 0 , S_1 = 2 , S_2 = 9 , S_3 = 5 \rightarrow \boxed{B}$

3) $S_1 = S_4 = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + S_2 = 3 \\ 2x_2 + S_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow x_2 = 1 , x_1 = \frac{3}{2} , S_2 = \frac{11}{2} , S_3 = 3 , S_4 = 0 \rightarrow \boxed{C}$

4) $S_1 = 0 , x_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 6 \\ 2x_2 + S_2 = 3 \\ 2x_2 + S_3 = 5 \\ x_2 + S_4 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = -1 \\ S_3 = 1 \\ S_4 = 2 \end{cases} \rightarrow F$ غیرقابل قبول است زیرا فرض غیرمنفی بودن متغیرها نقض

حل قابل قبول: Feasible Solution

در یک مسئله برنامه ریزی خطی با تعداد m محدودیت و n متغیر، اگر هر بار به دلخواه (n-m) متغیر را برابر با صفر در نظر بگیریم، یک دستگاه معادلات m×m حاصل خواهد شد که دارای جواب یگانه می باشد، این جواب را Basic solution

شکل F

(حل اساسی یا پایه) می نامند. حل های اساسی که تمامی متغیرهای آن، شرط غیر منفی بودن را دارا باشند به

← A، B، C، D، E

Basic feasible solution (BFS) معروف اند. از نظر هندسی هر حل اساسی معادل با یکی از گوشه های جواب

می باشد. آن حل اساسی قابل قبول که تابع هدف را بهینه نماید، حل بهینه (optimal solution) نامیده می شود.

- روش حل سیمپلکس:

متغیر وارد شونده

متغیرهای اساسی	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	R.H.S.
x_0	-1	4	3	0	0	0	0	0
s_1	0	2	3	1	0	0	0	6
s_2	0	-3	2	0	1	0	0	3
s_3	0	0	2	0	0	1	0	5
s_4	0	$\boxed{2}$	1	0	0	0	1	4
x_0	-1	0	1	0	0	0	-2	-8
s_1	0	0	$\boxed{2}$	1	0	0	-1	2
s_2	0	0	$\frac{7}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$	9
s_3	0	0	2	0	0	1	0	5
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	2
x_0	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	-9
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1
s_2	0	0	0	$-\frac{7}{4}$	1	0	$\frac{13}{4}$	$\frac{11}{2}$
s_3	0	0	0	-1	0	1	1	3
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

متغیرهای اساسی

خارج شونده

→ Right hand side

→ در سمت معادلات

→ $-x_0+4x_1+3x_2=0$

(اگر عدد ۱- باشد، یعنی ضرایب متغیرها در یک منفی ضرب شده اند.)

متغیرهای غیر اساسی، صفر هستند.

- عنصر پاشنه گردی (Pivot element)

→ گوشه B

→ همه ضرایب صفر و منفی اند پس حالت بهبود نداریم، پس گوشه بهینه است.

→ گوشه C

پس از تشکیل اولین جدول سیمپلکس، دو مرحله پیش رو خواهیم داشت: ۱) انتخاب متغیر وارد شونده به پایه ۲) تعیین متغیر خارج شونده از پایه. برای قسمت ۱ در صورت max بودن تابع هدف، متغیری را انتخاب می‌کنیم که مثبت‌ترین ضریب تابع هدف را داشته باشد و در صورت min بودن آن را انتخاب می‌کنیم که منفی‌ترین ضریب تابع هدف را داشته باشد.

برای انتخاب متغیر خارج شونده از پایه، مقادیر سمت راست جدول را بر عناصر مثبت ستون متغیر کاندید شده برای ورود به پایه تقسیم نموده، کوچکترین حاصل تقسیم، نشانگر متغیر خارج شونده از پایه می‌باشد. عنصری در جدول که در محل تقاطع متغیر ورودی و خروجی قرار دارد، به عنصر پاشنه گردی (Pivot element) معروف است.

- محاسبات روبرو، چگونگی خارج کردن متغیر از پایه را نشان می‌دهد و دلیل انجام شدن تقسیم‌ها:

① $\to 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{2} = 3$

② $\to -3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{+3}{-3} = -1$ ✗

③ $\to 0x_1 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{0} = +\infty$ ✗

④ $\to 2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2$ نزدیک‌تر

- شرط توقف برای مسائل max این است که در جدول بهینه، ضرایب تابع هدف همگی صفر یا منفی باشند و در مسائل min این ضرایب همگی صفر یا مثبت باشند.

- جلسه نهم ۱۲/۹: - مثال:

$$\max x_0 = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

$$\text{st:}\quad x_1 + 3x_2 + x_4 \le 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 + s_1 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 + s_3 = 3 \end{cases}$$

$$s_1, s_2, s_3, x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

$\max\ -x_0 + 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

ماتریس یکه باشد

متغیرهای اساسی	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3	R.H.S.
x_0	-1	2	4	1	1	0	0	0	0
S_1	0	1	$\boxed{3}$	0	1	1	0	0	4
S_2	0	2	1	0	0	0	1	0	3
S_3	0	0	1	4	1	0	0	1	3
x_0	-1	$2/3$	0	1	$-1/3$	$-4/3$	0	0	$-16/3$
x_2	0	$1/3$	1	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$4/3$
S_2	0	$5/3$	0	0	$-1/3$	$-1/3$	1	0	$5/3$
S_3	0	$-1/3$	0	$\boxed{4}$	$2/3$	$-1/3$	0	1	$5/3$
x_0	-1	$3/4$	0	0	$-1/2$	$-5/4$	0	$-1/4$	$-69/12$
x_2	0	$1/3$	1	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$4/3$
S_2	0	$\boxed{5/3}$	0	0	$-1/3$	$-1/3$	1	0	$5/3$
x_3	0	$-1/12$	0	1	$1/6$	$-1/12$	0	$1/4$	$5/12$
x_0	-1	0	0	0	$-21/40$	$-44/40$	$-9/20$	$-1/4$	$-390/40$
x_2	0	0	1	0	$2/5$	$2/5$	$-1/5$	0	1
x_1	0	1	0	0	$-1/5$	$-1/5$	$3/5$	0	1
x_3	0	0	0	1	$9/40$	$-1/10$	$1/20$	$1/4$	$1/2$

★ وقتی محدودیت ها همگی کوچکتر مساوی هستند، نقطه مبدا حتماً قابل قبول است. ← مبدا مختصات

- همه متغیرهایی که در پایه هستند، ضریبشان در تابع هدف صفر است.

$-\frac{1}{5}R_2 + R_1$

$\frac{1}{20}R_2 + R_3$ یا $\frac{1}{12}R_2' + R_3$

$-\frac{9}{20}R_2 +$ ضرایب تابع هدف ضرب

$x_1^* = 1,\ x_2^* = 1,\ x_3^* = 1/2,\ x_0^* = \frac{390}{40} = \frac{39}{6} = \frac{13}{2} \longleftarrow x_0 = -\frac{390}{40}$

- برای انتخاب متغیر وارد شونده به پایه، راه های دیگری نیز وجود دارد.

- اشتباه در انتخاب متغیر وارد شونده باعث می شود دیرتر و با محاسبات بیشتر به گوشه بهینه برسیم.

- اگر در انتخاب متغیر خارج شونده اشتباه کنیم، از فضای قابل قبول جواب خارج می شویم و در جدول سمت راست حداقل یکی از اعداد منفی می شود که در روش سیمپلکس غیرقابل قبول است.

روش حذفی گوس - جردن :

$3x_2 = 4 - x_1 - x_4 - s_1 \to \boxed{x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1}$

$\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 + 4x_3 + x_4 + s_3 = 3$

$-\frac{1}{3}x_1 + 4x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 + s_3 = \frac{5}{3}$

$2x_1 + (\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1) + s_2 = 3$

$\underbrace{2x_1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1}_{} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 + s_2 = 3$

$\frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 + s_2 = \frac{5}{3}$

$\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_1 = \frac{4}{3}$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_1 = \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3}x_1 \quad - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 + s_2 = \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3}x_1 + 4x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1 + s_3 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$x_0 = 2x_1 + 4(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}s_1) + x_3 + x_4 \to -x_0 + \frac{2}{3}x_1 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}s_1 = -\frac{16}{3}$

$x_0 = 2x_1 + \frac{16}{3}$

معادل با جدول سیمپلکس بدست آمده

$-x_0 = -\frac{2}{3}x_1 - x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3}s_1 - \frac{16}{3}$

- تمرین : مدل برنامه ریزی خطی زیر را به کمک روش سیمپلکس حل کنید. (جواب در صفحه ۳۳)

$$\begin{aligned} \min\ x_0 &= x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ st: \ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7 \\ & -2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

- مثال: یک محصول از ۴ عدد قطعه A و ۳ عدد قطعه B تولید می شود. قطعات A و B از دو نوع ماده اولیه مختلف ساخته می شوند که از هر کدام به ترتیب ۱۰۰ و ۲۰۰ واحد در دسترس می باشد. ۳ دپارتمان در تولید A و B مشارکت دارند که هر یک از روش متفاوتی برای تولید بهره می گیرند. جدول زیر اطلاعات مربوطه را نشان می دهد. با استفاده از مدل برنامه ریزی خطی، تعداد دفعات تولید از هر دپارتمان را بگونه ای تعیین نمایید که حداکثر محصول نهایی تولید شود.

محصول نهایی

A A A A
B B B

دپارتمان	مادهٔ اولیه ۱	مادهٔ اولیه ۲	قطعه A	قطعه B
	ورودی در هر بار تولید		خروجی در هر بار تولید	
x_1 ۱	۸	۶	۷	۵
x_2 ۲	۵	۹	۶	۹
x_3 ۳	۳	۸	۸	۴
موجودی	۱۰۰	۲۰۰		

x_i: تعداد دفعات راه اندازی دپارتمان i ام

$$\begin{cases} 8x_1+5x_2+3x_3 \le 100 \\ 6x_1+9x_2+8x_3 \le 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{قطعه A} \quad 7x_1+6x_2+8x_3 \longrightarrow \dfrac{7x_1+6x_2+8x_3}{4} \\ \text{قطعه B} \quad 5x_1+9x_2+4x_3 \longrightarrow \dfrac{5x_1+9x_2+4x_3}{3} \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $20 \to A$, $12 \to B$; $\frac{20}{4}=5$, $\frac{12}{3}=4$ $\to \min(5,4)=4$

$$\text{Max}\left[\min\left\{\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4}, \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}\right\}\right] \longleftrightarrow$$ تابع هدف خطی نیست. (در درس min دو خط غیرخطی است.)

مثال عددی: $x_1=10,\ x_2=0,\ x_3=0 \to \min\left\{\frac{70}{4}, \frac{50}{3}\right\}=16.6$

$x_1=5,\ x_2=5,\ x_3=5 \to \min\left\{\frac{105}{4}, \frac{90}{3}\right\}=26$

$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=20 \to \min\left\{\frac{160}{4}, \frac{80}{3}\right\}=26.5$

تبدیل به فرم خطی:

$\max Z$ $\quad st:\ Z \le \frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4}$ حتماً با یکی مساوی می‌شود

$Z \le \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3} \to$ و از دیگری کوچکتر می‌شود

$8x_1+5x_2+3x_3 \le 100$

$6x_1+9x_2+8x_3 \le 200$

$Z,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$

چرا از هر دو کوچکتر نمی‌شود؟ $\underline{\max Z}$

اعتبارسنجی (validation) مدل

از مراحل مهم در مدل های پیچیده

جلسه دهم ۱۱,۱۲ از مثال:

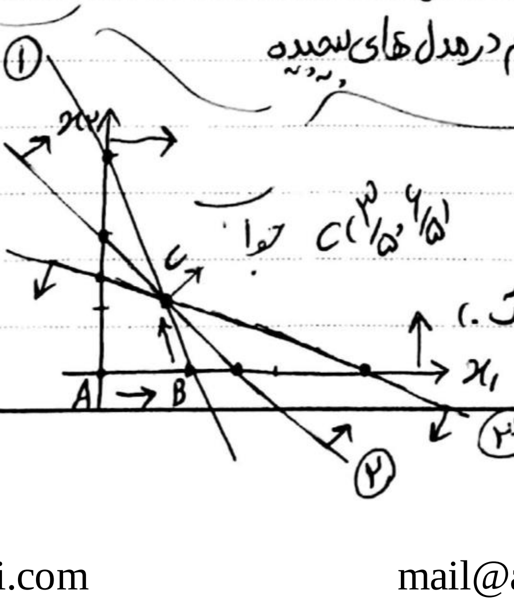
$\min x_0 = 4x_1 + x_2$

$st:\ 3x_1+x_2=3$

$4x_1+3x_2 \ge 6$

$x_1+2x_2 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$



جواب $C\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$

(نقطه مبدأ نشدنی (infeasible) است.)

Subject: ۲۹
Year. Month. Date. ( )

★ در فضای n بعدی، یک گوشه از تلاقی n ابرصفحه بدست می آید
وقتی n+1 ابرصفحه شود دچار انحطاط می شویم

$(R_1, R_2 = 0)$

تبدیل به فرم استاندارد: $\min x_0 = 4x_1 + x_2$

$$st: \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - S_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + S_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + S_3 = 3 \end{cases}$$

$x_1, x_2, S_2, S_3 \geq 0$

برای تشکیل پایه اولیه، می بایست به محدودیت هایی که از ابتدا به شکل مساوی و یا بصورت بزرگتر یا مساوی می باشند، متغیرهای مصنوعی (artificial variable) افزوده شوند. وظیفه این متغیرها، صرفاً شروع حل بوده و حتماً می بایست در جواب بهینه مقدار آنها صفر شده باشد

اساس	x_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.H.S.
x_0	-1	4	1	0	M?	M?	0	0
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3 ?
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6 ?
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3
x_0	-1	$4-7M$	$1-4M$	M	0	0	0	$-9M$
R_1	0	$\boxed{3}$	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3
x_0	-1	0	$\frac{-5M-1}{3}$	M	$\frac{7M-4}{3}$	0	0	$-2M-4$
x_1	0	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R_2	0	0 عامل لولا	$\boxed{5/3}$	-1	$-4/3$	1	0	2
S_3	0	0	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	2
x_0	-1	0	0	$-1/5$	$\frac{15M-24}{15}$	$\frac{5M+1}{5}$	0	$-18/5$
x_1	0	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
x_2	0	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
S_3	0	0	0	$\boxed{1}$	1	-1	1	0

در جواب بهینه مقدار آنها صفر شده باشد

نقطه مبدأ

← دو روش برای وادار کردن روش سیمپلکس به صفر کردن متغیرهای مصنوعی در جواب بهینه:

۱- روش M $(M >> 0)$

۲- سیمپلکس دو مرحله ای (Two Phases simplex)

← برای تضمین اینکه متغیرهای مصنوعی در حل بهینه، مقدار مثبت نداشته باشند، دو روش بکار برده می شود: ۱- روش M ۲- سیمپلکس دو مرحله ای

← در روش M، اگر تابع هدف Min باشد، متغیرها

$\frac{7M-4}{3} \times R_1$ → M نداریم

انحطاط (حالات بعد)

به جواب رسیدیم اما باید ادامه بدیم

وارد فضای کسش شدیم.

$$\min x_0 = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

مصنوعی با ضریب $M+$ و اگر تابع هدف Max باشد، با ضریب $M-$ به آن افزوده می‌گردد.

لازم به ذکر است که قبل از شروع روش سیمپلکس، ابتدا می‌باید به کمک عملیات سطری، ضرایب M در تابع هدف برای متغیرهای مصنوعی تبدیل به صفر گردد.

قرار نیست مجدداً وارد پایه شوند.

اساس	x_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.H.S
x_0	-1	0	0	0	X	X	$\frac{1}{5}$	$-\frac{18}{5}$
x_1	0	1	0	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
S_2	0	0	0	1	1	-1	1	0

M نداریم

جواب عوض شد (همان نقطه C)

مثال:

$$\max x_0 = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$St: \quad x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

استاندارد

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - S_2 + R_2 = 10 \\ S_2, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	S_2	R_1	R_2	R.H.S
R_1	0	1	1	1	0	1	0	7
R_2	0	2	-5	1	-1	0	1	10
x_0	-1	2	3	-5	0	$-M$	$-M$	0
x_0	-1	$2+3M$	$3-4M$	$-5+2M$	$-M$	0	0	$17M$
R_1	0	1	1	1	0	1	0	7
R_2	0	$\boxed{2}$	-5	1	-1	0	1	10
x_0	-1	0	$\frac{16+7M}{2}$	$\frac{M-12}{2}$	$\frac{2+M}{2}$	0	$\frac{-2-3M}{2}$	$\frac{4M-20}{2}$
R_1	0	0	$\boxed{\frac{7}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
x_1	0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5
x_0	-1	0	0	$-\frac{100}{14}$	$-\frac{2}{14}$	X	X	$-\frac{204}{14}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
x_1	0	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$

حل بهینه

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{45}{7} \\ x_2^* = \frac{4}{7} \\ x_0 = \frac{204}{14} = \frac{102}{7} \end{cases}$$

$(x_3^* = 0)$

- تمرین:

$\max x_0 = x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$st: x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 - x_2 = 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

- تمرین:

$\min x_0 = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

$st: x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15$

$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

- نکته: در حل تمینه (وقتی متغیری را نمی‌توان وارد پایه کرد) اگر هنوز متغیر های مصنوعی در پایه بودند یعنی این صفحه‌ها نقطه اشتراک ندارند و مسئله جواب ندارد در واقع فضای شدنی نداریم.

- جلسه یازدهم ۱۲/۱۶: - تمرین:

$\max x_0 = x_1 + 5x_2 + 3x_3 - MR_1 - MR_2$

$st: x_1 + 2x_2 + x_3 + R_1 = 3$

$2x_1 - x_2 + R_2 = 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R.H.S.
x_0	-1	1	5	3	$-M$	$-M$	0
R_1	0	1	2	1	1	0	3
R_2	0	2	-1	0	0	1	4
x_0	-1	$1+3M$	$5+M$	$3+M$	0	0	$7M$
R_1	0	1	2	1	1	0	3
$\leftarrow R_2$	0	$\boxed{2}$	-1	0	0	1	4
x_0	-1	0	$\frac{11+5M}{2}$	$3+M$	0	$\frac{-1-3M}{2}$	$-2+M$
$\leftarrow R_1$	0	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	1
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
x_0	-1	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{-11-5M}{5}$	$\frac{6-10M}{5}$	$-\frac{21}{5}$
$\leftarrow x_2$	0	0	1	$\boxed{\frac{2}{5}}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$
x_0	-1	0	-2	0	X	X	-5
x_3	0	0	$\frac{5}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	1
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2

$\frac{-1-3M}{2} R_2$

→ وارد فضای شدنی شدیم.

$\frac{-11-5M}{5} R_1$

حل بهینه $\begin{cases} x_1^* = 2 & (x_2^* = 0) \\ x_3^* = 1 \\ x_0^* = 5 \end{cases}$

PaPCO

تمرین: min x_0 = ۵x_1 - ۶x_2 - ۷x_3 + MR_1 + MR_3

st: x_1 + ۵x_2 - ۳x_3 - S_1 + R_1 = ۱۵

۵x_1 - ۶x_2 + ۱۰x_3 + S_2 = ۲۰

x_1 + x_2 + x_3 + R_3 = ۵

x_1 و x_2 و x_3 و S_1 و S_2 $\geq$ ۰

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	S_2	R_3	RHS
x_0	-۱	۵	-۶	-۷	۰	M	۰	M	۰
R_1	۰	۱	۵	-۳	-۱	۱	۰	۰	۱۵
S_2	۰	۵	-۶	۱۰	۰	۰	۱	۰	۲۰
R_3	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۵
x_0	-۱	۵-۲M	-۶-۶M ↓	۲M-۷	M	۰	۰	۰	-۲۰M
← R_1	۰	۱	$\boxed{۵}$	-۳	-۱	۱	۰	۰	۱۵
S_2	۰	۵	-۶	۱۰	۰	۰	۱	۰	۲۰
R_3	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۵
x_0	-۱	(۳۱-۴M)/۵	۰	↓ (۴M-۵۳)/۵	(-۶-M)/۵	(۶+۶M)/۵	۰	۰	۱۸-۲M
x_2	۰	۱/۵	۱	-۳/۵	-۱/۵	۱/۵	۰	۰	۳
S_2	۰	۳۱/۵	۰	۳۲/۵	-۶/۵	۶/۵	۱	۰	۳۸
← R_3	۰	۴/۵	۰	$\boxed{۸/۵}$	۱/۵	-۱/۵	۰	۱	۲
x_0	-۱	(۱۱۵-۴M)/۱۰ ↓		۰	(-۴M+۵)/۴۰	(۴۴M-۵)/۴۰	۰	(۴M+۵۳)/۸	(۱۲۵-۴M)/۴
x_2	۰	۱/۲	۱	۰	-۱/۸	۱/۸	۰	۳/۸	۱۵/۴
S_2	۰	۳	۰	۰	-۲	۲	۱	-۴	۳۰
← x_3	۰	$\boxed{۱/۲}$	۰	۱	۱/۸	-۱/۸	۰	۵/۸	۱۰/۸
x_0	-۱	۰	۰	(۴M-۱۱۵)/۵	↓ -۱۱/۴	X	۰	X	۵/۲
x_2	۰	۰	۱	-۱	-۱/۴	۱/۴	۰	-۱/۴	۵/۲
S_2	۰	۰	۰	-۶	-۱۱/۴	۱۱/۴	۱	-۳۱/۴	۴۵/۲
← x_1	۰	۱	۰	۲	$\boxed{۱/۴}$	-۱/۴	۰	۱۰/۸	۵/۲
x_0	-۱	۱۱	۰	(۴M-۵)/۵	۰	X	۰	X	۳۰
x_2	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۵
S_2	۰	۱۱	۰	۱۶	۰	۰	۱	۶	۵۰
S_1	۰	۴	۰	۸	۱	-۱	۰	۵	۱۰

(۶+۶M)/۵ R_1

(۴M+۵۳)/۸ R_3

(۴M-۱۱۵)/۵ R_3

حل بهینه:

x_2^* = ۵

x_1^* = ۰ (S_1 = ۱۰, S_2 = ۵۰)

x_3^* = ۰

x_0^* = -۳۰

- تمرین صفحه ۲۷:

$$\min x_0 = x_1 - 3x_2 - 2x_3$$
$$st:\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 = 7$$
$$-2x_1 + 4x_2 + s_2 = 12$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_3 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

اساسی	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R.H.S.
x_0	-1	1	-3	-2	0	0	0	0
s_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
s_2	0	-2	$\boxed{4}$	0	0	1	0	12
s_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
x_0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	-2	0	$\frac{3}{4}$	0	9
s_1	0	$\frac{5}{2}$	0	2	1	$\frac{1}{4}$	0	10
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
s_3	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\boxed{8}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	1
x_0	-1	$-\frac{9}{8}$	0	0	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{37}{4}$
s_1	0	$\boxed{\frac{25}{8}}$	0	0	1	$\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{39}{4}$
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
x_3	0	$-\frac{5}{16}$	0	1	0	$-\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_0	-1	0	0	0	$\frac{9}{25}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{1276}{100}$
x_1	0	1	0	0	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{50}$	$-\frac{2}{25}$	$\frac{78}{25}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{32}{100}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{114}{25}$
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$

$\frac{4}{25}R_1 + R_2$

$\frac{9}{25}R_1$

$\frac{1}{10}R_1 + R_3$

حل بهینه
$$\begin{cases} x_1^* = \frac{78}{25} \\ x_2^* = \frac{114}{25} \\ x_3^* = \frac{11}{10} \\ x_0^* = \frac{1276}{100} \end{cases}$$

- روش سیمپلکس دو مرحله‌ای:

$$\min y_0 = R_1 + R_2 + \dots$$
$$st:\ AX = b$$
$$X \geq 0$$

در این روش، حل شامل دو مرحله می‌باشد: مرحله اول با شروع از مبدأ مختصات در نهایت به یک گوشه قابل قبول از فضای جواب خواهد رسید و مرحله دوم از گوشه‌ی قابل قبول بدست آمده در مرحله قبل به گوشه‌ی بهینه می‌رسد. در مرحله اول، تابع هدف اصلی مسئله کنار گذاشته شده و یک تابع هدف مصنوعی جانشین آن می‌شود.

این تابع هدف بدون توجه به Max یا Min بودن تابع هدف اصلی، همواره مینیمم کردن مجموع متغیرهای مصنوعی می باشد. در شروع مرحله دوم، تابع هدف مصنوعی کنار گذاشته شده و تابع هدف اصلی جایگزین می گردد.

- مثال:

$\boxed{\min x_0 = 3x_1 + 5x_2}$ $\quad \min y_0 = R_2 + R_3$

$$\begin{aligned} st: \ & x_1 + s_1 = 4 \\ & 2x_2 + R_2 = 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 - s_3 + R_3 = 18 \\ & x_1, x_2, s_1 \geq 0 \end{aligned}$$

★ در این روش نیز می باید قبل از شروع مرحله اول، با کمک عملیات سطری، ضرایب متغیرهای مصنوعی در تابع هدف، صفر گردد.

اساس	y_0	x_1	x_2	s_3	s_1	R_2	R_3	R.H.S.
y_0	-1	0	0	0	0	1	1	0
s_1	0	1	0	0	1	0	0	4
R_2	0	0	2	0	0	1	0	12
R_3	0	3	2	-1	0	0	1	18
y_0	-1	-3	-4	1	0	0	0	-30
s_1	0	1	0	0	1	0	0	4
R_2	0	0	$\boxed{2}$	0	0	1	0	12
R_3	0	3	2	-1	0	0	1	18
y_0	-1	-3	0	1	0	2	0	-6
s_1	0	1	0	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	0	$1/2$	0	6
R_3	0	$\boxed{3}$	0	-1	0	-1	1	6
y_0	-1	0	0	0	0	1	1	0
s_1	0	0	0	$1/3$	1	$1/3$	$-1/3$	2
x_2	0	0	1	0	0	$1/2$	0	6
x_1	0	1	0	$-1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	2

مبدأ مختصات

=

گوشه ای قابل قبول از جواب

پایان مرحله اول سیمپلکس

Subject: ۳۵

Year. Month. Date. ( )

اساسی	x_0	x_1	x_2	S_3	S_1	R_2	R_3	R.H.S.
x_0	-۱	۳	۵	۰	۰	×	×	۰
S_1	۰	۰	۰	۱/۳	۱	۱/۳	-۱/۳	۲
x_2	۰	۰	۱	۰	۰	۱/۲	۰	۶
x_1	۰	۱	۰	-۱/۳	۰	-۱/۳	۱/۳	۲
x_0	-۱	۰	۰	۱	۰	×	×	-۳۶
S_1	۰	۰	۰	۱/۳	۱	۱/۳	-۱/۳	۲
x_2	۰	۰	۱	۰	۰	۱/۲	۰	۶
x_1	۰	۱	۰	-۱/۳	۰	-۱/۳	۱/۳	۲

حل بهینه

مثال: $\min y_0 = R_1 + R_2$

$\max x_0 = x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$st: x_1 + 2x_2 + x_3 + R_1 = 3$

$2x_1 - x_2 + R_2 = 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

اساسی	y_0	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R.H.S.
y_0	-۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
R_1	۰	۱	۲	۱	۱	۰	۳
R_2	۰	۲	-۱	۰	۰	۱	۴
y_0	-۱	-۳	-۱	-۱	۰	۰	-۷
R_1	۰	۱	۲	۱	۱	۰	۳
R_2	۰	$\boxed{۲}$	-۱	۰	۰	۱	۴
y_0	-۱	۰	-۵/۲	-۱	۰	۳/۲	-۱
R_1	۰	۰	$\boxed{۵/۲}$	۱	۱	-۱/۲	۱
x_1	۰	۱	-۱/۲	۰	۰	۱/۲	۲
y_0	-۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
x_2	۰	۰	۱	۲/۵	۲/۵	-۱/۵	۲/۵
x_1	۰	۱	۰	۱/۵	۱/۵	۲/۵	۱۱/۵

پایان فاز اول سیمپلکس

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R.H.S.
x_0	-1	1	5	3	×	×	0
x_2	0	0	1	$2/5$	$2/5$	$-1/5$	$2/5$
x_1	0	1	0	$1/5$	$1/5$	$2/5$	$11/5$
x_0	-1	0	0	$4/5$	×	×	$-21/5$
x_2	0	0	1	$\boxed{2/5}$	$2/5$	$-1/5$	$2/5$
x_1	0	1	0	$1/5$	$1/5$	$2/5$	$11/5$
x_0	-1	0	-2	0	×	×	-5
x_3	0	0	$5/2$	1	1	$-1/2$	1
x_1	0	1	$-1/2$	0	0	$2/5$	2

update کردن تابع هدف

حل بهینه $\begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_3^* = 1 \\ x_0^* = 5 \end{cases}$

- حالات خاص سیمپلکس:

۱) انحطاط (تبهگنی) (Degeneracy): الف) موقت ب) دائم

- مثال:

$$\max x_0 = 3x_1 + 9x_2$$

$$st: x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 4x_2 + S_1 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + S_2 = 4$$

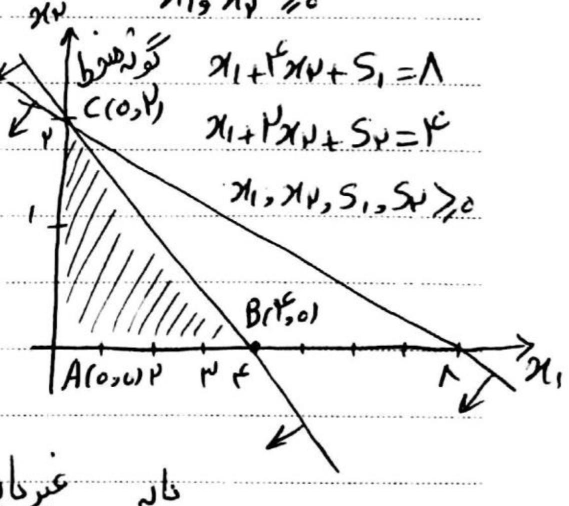
$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

اساس	x_0	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S.
x_0	-1	3	9	0	0	0
S_1	0	1	$\boxed{4}$	1	0	8
S_2	0	1	2	0	1	4
x_0	-1	$3/4$	0	$-9/4$	0	-18
x_2	0	$1/4$	1	$1/4$	0	2
S_2	0	$\boxed{1/2}$	0	$-1/2$	1	0
x_0	-1	0	0	$-6/4$	$-3/2$	-18
x_2	0	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
x_1	0	1	0	-1	2	0

مینیمم ها برابر

سمت راست حداقل یک صفر داریم

حل بهینه



قرار گرفتن در حلقه تکرار

انحطاط دائم

غیرپایه (x_1, x_2) پایه (S_1, S_2) (S_1, x_2) (x_1, S_2)

انحطاط موقت: مثلاً B حل بهینه است و نمایانیا به آن هرگز

انحطاط موقت

- جلسه دوازدهم ۱۸/۱۲: - مثال:

$\max x_0 = 2x_1 + x_2$

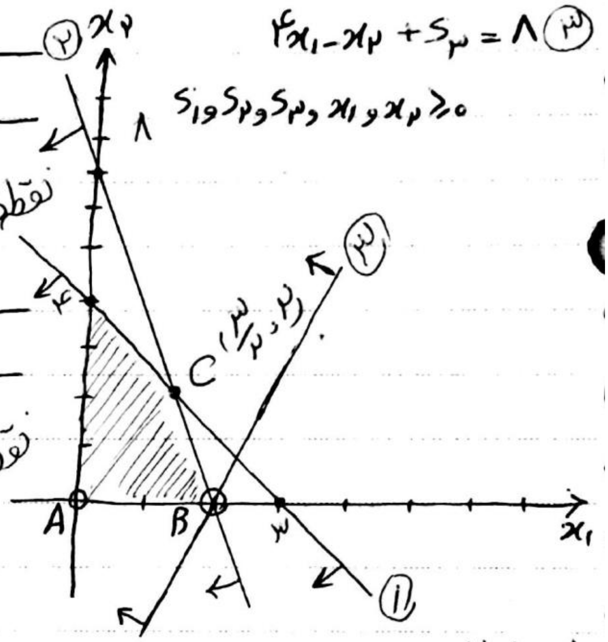
$st: 4x_1+3x_2+S_1=12$ (1)

$4x_1+x_2+S_2=8$ (2)

$4x_1-x_2+S_3=8$ (3)

$S_1, S_2, S_3, x_1, x_2 \ge 0$

اساسی	x_0	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S.
x_0	-1	2	1	0	0	0	0
S_1	0	4	3	1	0	0	12
S_2	0	$\boxed{4}$	1	0	1	0	8
S_3	0	4	-1	0	0	1	8
x_0	-1	0	1/2	0	-1/2	0	-4
S_1	0	0	$\boxed{2}$	1	-1	0	4
x_1	0	1	1/4	0	1/4	0	2 نقطه B
S_3	0	0	-2	0	-1	1	0
x_0	-1	0	0	-1/4	-1/4	0	-5
x_2	0	0	1	1/2	-1/2	0	2
x_1	0	1	0	-1/8	3/8	0	3/2 نقطه C
S_3	0	0	0	1	-2	1	4



۲) حل نامحدود (umbounded solution):

$\max x_0 = 2x_1 + x_2$

گونه A $\quad st: x_1 - x_2 \le 10$

$2x_1 - x_2 \le 40$

$x_1, x_2 \ge 0$

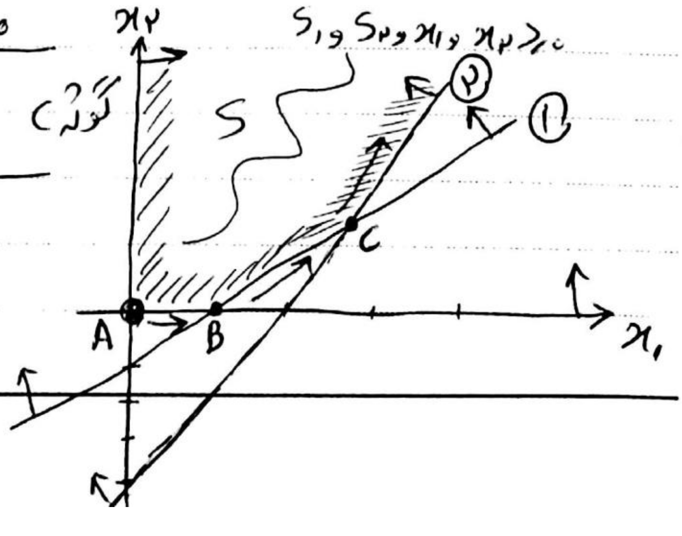
گونه B $\quad x_1 - x_2 + S_1 = 10$ (1)

$2x_1 - x_2 + S_2 = 40$ (2)

$S_1, S_2, x_1, x_2 \ge 0$

اساسی	x_0	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S.
x_0	-1	2	1	0	0	0
S_1	0	$\boxed{1}$	-1	1	0	10
S_2	0	2	-1	0	1	40
x_0	-1	0	3	-2	0	-20
x_1	0	1	-1	1	0	10
S_2	0	0	$\boxed{1}$	-2	1	20
x_0	-1	0	0	4	? -3	-80
x_1	0	1	0	-1	1	30
x_2	0	0	1	-2	1	20

گونه C



اگر در یکی از مراحل حل با روش سیمپلکس، متغیری که کاندید ورود به پایه باشد، وجود داشته باشد ولی هیچ متغیری به دلیل صفر یا منفی بودن تمام عناصر ستون متغیر کاندید شده برای ورود، نتواند از پایه خارج گردد بدین معنا خواهد بود که فضای جواب نامحدود می‌باشد و از یک گوشه‌ی این فضا روی یکی از یال‌ها به سمت بی‌نهایت در حرکت هستیم.

در عمل هرگز امکان ندارد که فضای جواب نامحدود شود. (احتمالاً محدودیتی را فراموش کرده‌ایم لحاظ کنیم.)

- مثال:

$$\min x_0 = -6x_1 + 2x_2$$

$$st: \quad 2x_1 - x_2 \le 2$$

$$x_1 \le 4$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$2x_1 - x_2 + s_1 = 2$$

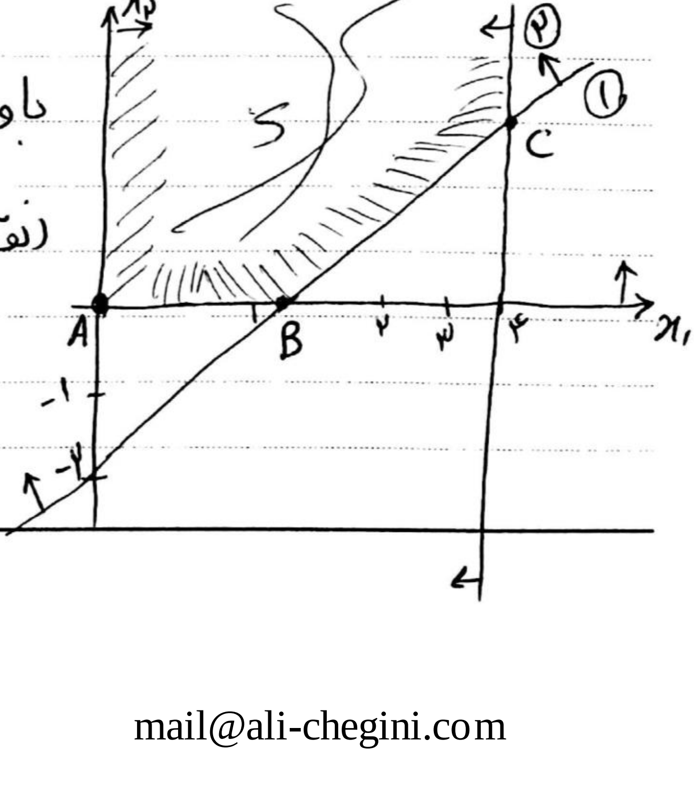
$$x_1 + s_2 = 4$$

$$s_1, s_2, x_1, x_2 \ge 0$$

اساس	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S.	
x_0	-1	-6	2	0	0	0	
s_1	0	2	-1	1	0	2	گوشه A
s_2	0	1	0	0	1	4	
x_0	-1	0	-1	3	0	6	
x_1	0	1	-1/2	1/2	0	1	گوشه B
s_2	0	0	$\boxed{1/2}$	-1/2	1	3	
x_0	-1	0	0	2	2	12	
x_1	0	1	0	0	1	4	گوشه C
x_2	0	0	1	-1	2	6	

$$x_1^* = 4 \qquad x_2^* = 6 \qquad x_0^* = -12$$

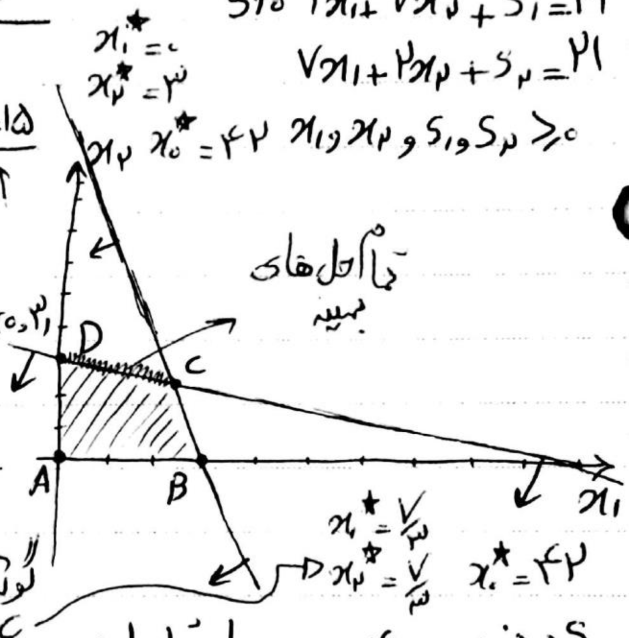
با وجود اینکه فضای جواب نامحدود است اما حل بهینه (نقطه C) محدود است.



اساس	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S.
x_0	-۱	۴	↓۱۴	۰	۰	۰
←S_1	۰	۲	$\boxed{۷}$	۱	۰	۲۱
S_2	۰	۷	۲	۰	۱	۲۱
x_0	-۱	۵	✓۰	-۲	✓۰	-۴۲
x_2	۰	۲/۷	۱	۱/۷	۰	۳
S_2	۰	۴۵/۷	۰	-۲/۷	۱	۱۰۵/۷=۱۵
						↑ گوشه D

۳ـ حل‌های بهینه متعدد: (alternate optimal solution)

$$\max x_0 = 4x_1 + 14x_2$$
$$st: \; 2x_1 + 7x_2 + s_1 = 21$$
$$7x_1 + 2x_2 + s_2 = 21$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$



x_1 در هر دو ورود و عدم ورود به پایه قرار دارد. (در پایه نیست اما ضریب تابع هدفش صفر است.) آن را وارد پایه می‌کنیم.

x_0	-۱	✓۰	✓۰	-۲	۵	-۴۲
x_2	۰	۰	۱	۷/۴۵	-۲/۴۵	۷/۳
x_1	۰	۱	۰	-۲/۴۵	۷/۴۵	۷/۳

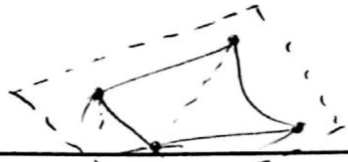
گوشه C

S_2 در هر دو ورود و عدم ورود به پایه قرار دارد. اگر آن را وارد پایه کنیم، مجدداً به جدول قبلی بر می‌گردیم و بین دو نقطه C و D مرتباً در حرکتیم. دلیل این است که تابع هدف موازی یکی از محدودیت‌ها است.

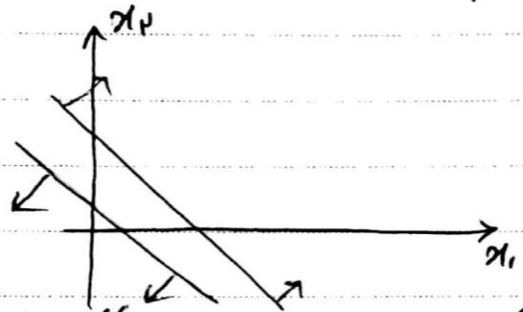
$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

↑ تمامی حل‌های بهینه ↑ ترکیب خطی آفین از دو نقطه C و D

۴ـ اگر تابع هدف به موازات یکی از یال‌های فضای جواب قرار داشته باشد و این یال نیز در بردارندهٔ حل بهینه باشد، در اینصورت حل بهینه یگانه نبوده و بی‌نهایت جواب بهینه خواهیم داشت که مقدار تابع هدف برای تمامی آنها یکسان می‌باشد. شیوه تشخیص این حالت این است که اگر در حل بهینه و در جدول مربوطه، به جز متغیرهای



اما اگر، متغیر یا متغیرهای دیگری وجود داشته باشند که ضریب تابع هدف آنها صفر باشد، به معنای داشتن حل های بهینه متعدد خواهد بود.



۴- نبود فضای حل قابل قبول:

← زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از محدودیت ها، مساوی یا بزرگتر مساوی باشد.

← به معنای عدم وجود فصل مشترک مابین محدودیت ها می باشد.

← شیوه تشخیص این موضوع این است که در پایان مرحله اول سیمپلکس دو مرحله ای، لااقل یک متغیر مصنوعی با مقدار مثبت در پایه باقی می ماند.

- جلسه سیزدهم ۱۲،۲۳: تعطیل

- جلسه چهاردهم ۱۲،۲۵: -

- جلسه پانزدهم ۹۵/۱/۱۵: فرم ماتریسی

$$\max x_0 = (c_1, c_2, \dots, c_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$st: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \geq 0$$

$$\max x_0 = CX$$
$$st: AX = b$$
$$X \geq 0$$

$$X = (X_B, X_N)$$
$$C = (C_B, C_N)$$
$$A = (B, N)$$

$$\max x_0 = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{st:}\quad x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 430$$
$$3x_1 + 2x_3 + s_2 = 460$$
$$x_1 + 4x_2 + s_3 = 420$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R.H.S
x_0	-1	3	2	5	0	0	0	0
s_1	0	1	2	1	1	0	0	430
s_2	0	3	0	$\boxed{2}$	0	1	0	460
s_3	0	1	4	0	0	0	1	420
x_0	-1	$-\frac{9}{2}$	2	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	-1150
s_1	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	200
x_3	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
s_3	0	1	4	0	0	0	1	420 $\rightarrow B^{-1}$
x_0	-1	-4	0	0	-1	-2	0	-1350
x_2	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
s_3	0	2	0	0	-2	1	1	20

$$C = (3, 2, 5, 0, 0, 0)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix}$$

مرحله اول:

ترتیب اهمیت ندارد در X ها.

$$X_B = (s_1, s_2, s_3)$$
$$X_N = (x_1, x_2, x_3) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C_B = (0, 0, 0)$$
$$C_N = (3, 2, 5)$$

مرحله دوم: $X_B = (s_1, x_3, s_3) \quad C_B = (0, 5, 0) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$X_N = (x_1, x_2, s_2) \quad C_N = (3, 2, 0)$

$$\longrightarrow \max x_0 = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} \qquad \max x_0 = C_B X_B + C_N X_N$$

$$\text{st:}\ (B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b \longrightarrow \boxed{\text{st:}\ B X_B + N X_N = b}$$

$$X_B, X_N \geq 0 \qquad\qquad X_B, X_N \geq 0$$

$$\Rightarrow B^{-1}BX_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

$$I\cdot X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \rightarrow$$ در هر مرحله کاربرد دارد.

وقتی توقف کرده ایم $X_N = 0 \longrightarrow X_B = B^{-1}b$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 420 \end{pmatrix}$$

ممکن متغیر مصنوعی هم باشند.

در هر مرحله از جدول سیمپلکس ، ماتریس تکیل شده در زیر متغیرهای آغاز کننده حل ، معکوس ماتریس $(B^{-1})B$ ، مرتبط با X_B های هر مرحله می باشد.

$$X_B = (x_2, x_3, s_3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1}P_{x_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$ برای تمامی ستون ها برقرار است. به جز برای تابع هدف

$$x_0 = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_NX_N$$

$$x_0 = C_BB^{-1}b - C_BB^{-1}NX_N + C_NX_N$$

$$x_0 = C_BB^{-1}b + \underbrace{(C_N - C_BB^{-1}N)}X_N \xrightarrow[\text{متوقفیم}]{\text{وقتی}} x_0 = C_BB^{-1}b$$

$$\boxed{\bar{C}_N = C_N - C_BB^{-1}N}$$

ضرایب تابع هدف متغیرهای غیر اساسی در هر مرحله

$$\bar{C}_B = C_B - C_BB^{-1}B = C_B - C_B = 0 \longleftarrow$$ برای متغیرهای اساسی

$$x_0 = (2,5,0)\begin{pmatrix}1/2 & -1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}430\\460\\420\end{pmatrix} = (1,2,0)\begin{pmatrix}430\\460\\420\end{pmatrix} = 1350$$

$\bar{C}_N \Rightarrow$

$X_B = (s_1, x_2, s_3) \qquad X_N = (x_1, x_3, s_2)$

$B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$

$C_B = (0,5,0) \qquad C_N = (3,2,0)$

$$\rightarrow \bar{C}_N = (\bar{c}_{x_1}, \bar{c}_{x_3}, \bar{c}_{s_2}) = (3,2,0) - (0,5,0)\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix} =$$

$$(3,2,0) - (0, 5/2, 0)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix} = (3,2,0) - (\tfrac{15}{2}, 0, \tfrac{5}{2}) = (-\tfrac{9}{2}, 2, -\tfrac{5}{2})$$

اگر در جدول ا ـ به اپتیمال بود و ضرایب تابع هدف منفی شوند: $x_0 = C_B B^{-1} b - (C_B B^{-1} N - C_N) X_N$

جلسه شانزدهم ۱۷/۱۰ : مثال ۶ (سیمپلکس تجدید نظر شده (Revised simplex))

$\max\ x_0 = 2x_1 + x_2$

st: $3x_1 + 4x_2 + s_1 = 6$

$6x_1 + x_2 + s_2 = 3$

$s_1, s_2, x_1, x_2 \geq 0$

اساس	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S.
x_0	-1	2	1	0	0	0
s_1	0	3	4	1	0	6
← s_2	0	$\boxed{6}$	1	0	1	3
x_0	-1	0	$2/3$	0	$-1/3$	-1
← s_1	0	0	$\boxed{7/2}$	1	$-1/2$	$9/2$
x_1	0	1	$1/6$	0	$1/6$	$1/2$
x_0	-1	0	0	$-4/21$	$-5/21$	$-13/7$
x_2	0	0	1	$2/7$	$-1/7$	$9/7$
x_1	0	1	0	$-1/21$	$4/21$	$2/7$

$X_B = (s_1, s_2)$

$X_N = (x_1, x_2)$

$C_B = (0,0)$

$C_N = (2,1)$

$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix}6\\ 3\end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}_{x_1}$$

$$\bar{C}_N = (\bar{c}_{x_1}, \bar{c}_{x_2}) = (2,1) - (0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = (2,1)$$ x_1 وارد پایه خواهد شد

$$X_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \min\left\{\frac{B^{-1}b}{B^{-1}P_x}\right\} = \min\left\{\underset{s_1}{\frac{6}{3}}, \underset{s_2}{\frac{3}{6}}\right\} = \frac{1}{2}$$ s_2 از پایه خارج می‌شود.

$B^{-1}P_x > 0$ ترتیبش مانند X_B است

مرحله بعدی: $x_B = (s_1, x_1)$, $X_N = (s_2, x_2)$, $C_B = (0,2)$, $C_N = (0,1)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$ b تا آخر مسئله ثابت می‌ماند.

$$\bar{C}_N = (\bar{c}_{s_2}, \bar{c}_{x_2}) = (0,1) - (0,2)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0,1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$ x_2 وارد پایه خواهد شد.

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B^{-1}P_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\theta = \min\left\{\frac{B^{-1}b}{B^{-1}P_{x_2}}\right\} = \min\left\{\underset{s_1}{\frac{9/2}{7/2}}, \frac{1/2}{1/6}\right\} = \frac{9}{7}$$ s_1 از پایه خارج می‌شود.

مرحله بعدی: $X_B = (x_2, x_1)$, $X_N = (s_2, s_1)$, $C_B = (1,2)$, $C_N = (0,0)$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{C}_N = (\bar{c}_{s_2}, \bar{c}_{s_1}) = (0,0) - (1,2)\begin{pmatrix} \frac{6}{21} & -\frac{3}{21} \\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N = (0,0) - \left(\frac{4}{21}, \frac{5}{21}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0) - \left(\frac{5}{21}, \frac{4}{21}\right) = \left(\underset{\le 0}{-\frac{5}{21}}, \underset{\le 0}{-\frac{4}{21}}\right)$$ به حل بهینه رسیدیم.

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{6}{21} & -\frac{3}{21} \\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$x_0^* = C_B \overbrace{B^{-1} b}^{X_B} = (1,2) \begin{pmatrix} \frac{6}{21} & -\frac{3}{21} \\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{13}{7}$$

- مراحل روش سیمپلکس تجدید نظر شده : ۱- مدل برنامه ریزی خطی را به فرم استاندارد تبدیل نموده و متغیرهای آغاز کننده‌ی حل را X_B و متغیرهای غیر اساسی را در X_N قرار دهید. C_B ، C_N و ماتریس های B و N را متناسب با X_B و X_N تشکیل دهید. ۲- با استفاده از فرمول داده شده، $\bar{C}_N$ را محاسبه نمایید. با استفاده از مقادیر بدست آمده متغیر ورودی به پایه را تعیین کنید. (در تابع هدف max، مثبت ترین مقدار و min منفی ترین مقدار) ۳- سمت راست به هنگام شده را به کمک $X_B = B^{-1}b$ تعیین نمایید. برای تعیین ستون به هنگام شده متغیر کاندید شده ورودی، B^{-1} را در ستون این متغیر در محدودیت های مسئله اصلی ضرب کنید. با تقسیم نظیر به نظیر عناصر $B^{-1}b$ بر مقادیر مثبت، ستون به هنگام شده متغیر ورودی و تعیین کوچکترین مقدار آن، متغیر خارج شونده از پایه را اخراج نمایید.

* ترتیب حاصل تقسیم ها در θ ها، ترتیب X_B ها می باشد. ۴- X_B و X_N را به هنگام نموده و به مرحله ۲ بازگردید.

- تعیین ماتریس B^{-1} هر مرحله با استفاده از B^{-1} مرحله قبل:

$$\underset{\text{جدید}}{B^{-1}} = E . \underset{\text{قدیم}}{B^{-1}}$$

$$I_m = (e_1, e_2, \dots, e_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = (e_1, \dots, e_{r-1}, \xi, e_{r+1}, \dots, e_m) \qquad \xi = \begin{pmatrix} -\alpha_1^j / \alpha_r^j \\ -\alpha_2^j / \alpha_r^j \\ \vdots \\ 1/\alpha_r^j \\ \vdots \\ -\alpha_m^j / \alpha_r^j \end{pmatrix}$$

r امین سطر

$$\begin{array}{c|ccc} & \cdots & x_j & \cdots \\ \hline x_1 & \cdots & \alpha_1^j & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \leftarrow x_r & \cdots & \alpha_r^j & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ x_m & \cdots & \alpha_m^j & \cdots \end{array}$$

عنصر لولاگردی

$B^{-1}_{\text{قدیم}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad B^{-1}_{\text{جدید}} = E.B^{-1}_{\text{قدیم}}$ $\quad \xi = \begin{pmatrix}-3/6\\1/6\end{pmatrix}$, $E=(e_1,\overset{\xi}{\cancel{e_2}})$

$E=\begin{pmatrix}1&-3/6\\0&1/6\end{pmatrix}$ $\quad B^{-1}_{\text{جدید}} = \begin{pmatrix}1&-1/2\\0&1/6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1/2\\0&1/6\end{pmatrix}$

مرحله بعدی: $\xi = \begin{pmatrix}\frac{1}{7/2}\\ \frac{-1/6}{7/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/7\\-1/21\end{pmatrix}$, $E=(\xi,e_2)$, $E=\begin{pmatrix}2/7&0\\-1/21&1\end{pmatrix}$

$B^{-1}_{\text{جدید}} = \begin{pmatrix}2/7&0\\-1/21&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1/2\\0&1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/7&-1/7\\-1/21&4/21\end{pmatrix}$

- مثال:

	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R.H.S.
x_0	-1	$-9/2$	2	0	0	$-5/2$	0	-1150
$\leftarrow s_1$	0	$-1/2$	$\boxed{2}$	0	1	$-1/2$	0	200
x_3	0	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
s_3	0	1	4	0	0	0	1	420
x_0	-1	-4	0	0	-1	-2	0	-1350
x_2	0	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
x_3	0	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
s_3	0	2	0	0	-2	1	1	20

$B^{-1}_{\text{قدیم}} = \begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\xi = \begin{pmatrix}1/2\\0\\-4/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\-2\end{pmatrix}$

$E=(\xi, e_2, e_3)$

$E=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$

$B^{-1}_{\text{جدید}} = E.B^{-1}_{\text{قدیم}} = \begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2&-1/4&0\\0&1/2&0\\-2&1/2&1\end{pmatrix}$

- تمرین:

$\max x_0 = 2x_1+4x_2+x_3+x_4$

$st: \; x_1+3x_2+x_4 \le 4$

$2x_1+x_2 \le 3$

$x_2+4x_3+x_4 \le 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

$\rightarrow \begin{cases} x_1+3x_2+x_4+s_1 = 4\\ 2x_1+x_2+s_2 = 3\\ x_2+4x_3+x_4+s_3 = 3\end{cases}$

$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \ge 0$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	R.H.S
x_0	-1	2	$4 \downarrow$	1	1	0	0	0	0
$\leftarrow s_1$	0	1	$\boxed{3}$	0	1	1	0	0	4
s_2	0	2	1	0	0	0	1	0	3
s_3	0	0	1	4	1	0	0	1	3
x_0	-1	$2/3 \downarrow$	0	1	$-1/3$	$-4/3$	0	0	$-16/3$
x_2	0	$1/3$	1	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$4/3$
$\leftarrow s_2$	0	$\boxed{5/3}$	0	0	$-1/3$	$-1/3$	1	0	$5/3$
s_3	0	$-1/3$	0	4	$2/3$	$-1/3$	0	1	$5/3$
x_0	-1	0	0	$\downarrow 1$	$-3/15$	$-18/15$	$-2/5$	0	-6
x_2	0	0	1	0	$6/15$	$6/15$	$-1/5$	0	1
x_1	0	1	0	0	$-1/5$	$-1/5$	$3/5$	0	1
$\leftarrow s_3$	0	0	0	$\boxed{4}$	$9/15$	$-6/15$	$1/5$	1	2
x_0	-1	0	0	0	$-21/60$	$-48/60$	$-9/20$	$-1/4$	$-13/2$
x_2	0	0	1	0	$6/15$	$6/15$	$-1/5$	0	1
x_1	0	1	0	0	$-1/5$	$-1/5$	$3/5$	0	1
x_3	0	0	0	1	$9/60$	$-6/60$	$1/20$	$1/4$	$1/2$

_جلسه هفدهم ۱,۲۲ :

مرحله اول: $X_B=(s_1,s_2,s_3)$

$X_N=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$C_B=(0,0,0)$

$C_N=(2,4,1,1)$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix}1&3&0&1\\2&1&0&0\\0&1&4&1\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N=C_N-C_BB^{-1}N$$
$$=(2,4,1,1)-(0,0,0)B^{-1}N$$
$$=(2,\underbrace{4}_{x_2 \text{ وارد شونده}},1,1)$$

$$X_B=B^{-1}b=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}P_{x_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\theta=\min\left\{\frac{4}{3},\frac{3}{1},\frac{3}{1}\right\}=\frac{4}{3}$$ s_1 خارج شونده

مرحله دوم:

$X_B=(x_2,s_2,s_3)$, $X_N=(x_1,s_1,x_3,x_4)$, $C_B=(4,0,0)$, $C_N=(2,0,1,1)$

$$B=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} , N=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&0&0&0\\0&0&4&1\end{pmatrix} , \bar{C}_N=C_N-C_BB^{-1}N=(2,0,1,1)-(4,0,0)\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}N$$

$$\bar{C}_N=(2,0,1,1)-(12,0,0)\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&0&0&0\\0&0&4&1\end{pmatrix}=(2,0,1,1)-(12,12,0,12)=(-10,-12,1,-11)$$

باید x_3 وارد پایه شود ولی با وارد کردن x_1 به پایه هم مشکلی بوجود نمی آید.

$X_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$, $B^{-1}P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$\min\left\{\frac{B^{-1}b}{B^{-1}P_{x_1}}\right\} = \{\underset{x_2}{4}, \underset{s_2}{\bar{1}}, \underset{s_3}{-5}\}$ s_2 از پایه خارج می‌شود. محاسبه B^{-1}: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ I

مرحله سوم: $X_B = (x_2, x_1, s_3)$, $X_N = (s_2, s_1, x_3, x_4)$, $C_B = (4, 2, 0)$

$C_N = (0,0,1,1)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{C}_N = C_N - C_B B^{-1} N = (0,0,1,1) -$

محاسبه B^{-1}: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/15 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & 0 \\ -6/15 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$ $(4,2,0)\begin{pmatrix} 6/15 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & 0 \\ -6/15 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\bar{C}_N = (0,0,1,1) - (\frac{18}{15}, \frac{2}{5}, 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,1,1) - (\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, 0, \frac{6}{5}) = (-\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, \bar{1}, -\frac{1}{5})$

x_3 وارد پایه می‌شود.

$X_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6/15 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & 0 \\ -6/15 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1}P_{x_3} = \begin{pmatrix} 6/15 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & 0 \\ -6/15 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\min\left\{\frac{B^{-1}b}{B^{-1}P_{x_3}}\right\} = \{\times, \times, \overline{\tfrac{1}{2}}\}$ s_3 از پایه خارج می‌شود.

مرحله چهارم: $X_B = (x_2, x_1, x_3)$, $X_N = (s_2, s_1, s_3, x_4)$, $C_B = (4, 2, 1)$, $C_N = (0,0,0,1)$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{C}_N = C_N - C_B B^{-1} N = (0,0,0,1) - (4,2,1)$

محاسبه B^{-1}: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6/15 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & 0 \\ -6/15 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/15 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & 0 \\ -6/60 & 1/20 & 1/4 \end{pmatrix}$ | $\times \begin{pmatrix} 6/15 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & 0 \\ -1/10 & 1/20 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\bar{C}_N = \ldots$

$X_B = B^{-1}B$, $X_0 = C_B B^{-1} b$

- مثال: (برای روش M بزرگ)

$$\max x_0 = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$
$$st: \; x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$X_B = (R_1, R_2), \quad X_N = (x_1, x_2, x_3, S_2)$$

$$C_B = (-M, -M), \quad C_N = (2, 3, -5, 0)$$

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b \\ x_0 = C_B B^{-1} b \\ x_0 = C_B B^{-1} b + \underbrace{(C_N - C_B B^{-1} N)}_{\bar{C}_N} X_N \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - S_2 + R_2 = 10 \\ S_2, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ \max x_0 = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - MR_1 - MR_2 \end{cases}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N = (\bar{c}_{x_1}, \bar{c}_{x_2}, \bar{c}_{x_3}, \bar{c}_{s_2})$$

$$= (2, 3, -5, 0) - (-M, -M) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

x_1 وارد پایه خواهد شد.

$$\bar{C}_N = (2, 3, -5, 0) - (-3M, 4M, -2M, M) = (\underline{2+3M}, 3-4M, -5+2M, -M)$$

$$\theta = \min_{B^{-1}P_{x_1} > 0} \left\{ \frac{B^{-1}b}{B^{-1}P_{x_1}} \right\}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \min \left\{ \overset{R_1}{\frac{7}{1}}, \overset{R_2}{\frac{10}{2}} \right\} = 5$$

R_2 از پایه خارج می‌گردد.

مرحله بعدی: $X_B = (R_1, x_1), \; X_N = (R_2, x_2, x_3, S_2), \; C_B = (-M, 2), \; C_N = (-M, 3, -5, 0)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N = (\bar{c}_{R_2}, \bar{c}_{x_2}, \bar{c}_{x_3}, \bar{c}_{s_2}) = (-M, 3, -5, 0) - (-M, 2) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N = (-M, 3, -5, 0) - (-M, 2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \boxed{\begin{matrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{matrix}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Subject: 50
Year. Month. Date. ( )

x_2 وارد پایه خواهد شد.

$$\bar{C}_N=(-M,3,-5,0)-\left(\frac{M}{2}+1,-\frac{7M}{2}-5,-\frac{M}{2}+1,-\frac{M}{2}-1\right)=\left(-\frac{3M}{2}-1,\frac{7M}{2}+8,\frac{M}{2}-6,\frac{M}{2}+1\right)$$

$$\theta=\min_{B^{-1}P_{x_2}>0}\left\{\frac{B^{-1}b}{B^{-1}P_{x_2}}\right\}=\min\left\{\overset{R_1}{\frac{2}{\frac{7}{2}}},\overset{x_1}{-}\right\}=\frac{4}{7}$$ R_1 از پایه خارج خواهد شد

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix},\quad B^{-1}P_{x_2}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

مرحله بعدی: $X_B=(x_2,x_1),\ X_N=(R_2,R_1,x_3,S_2),\ C_B=(3,2),\ C_N=(-M,-M,-5,0)$

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\-5&2\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&-1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\\\frac{5}{7}&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N=(\bar{C}_{R_2},\bar{C}_{R_1},\bar{C}_{x_3},\bar{C}_{S_2})=(-M,-M,-5,0)-(3,2)\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\\\frac{5}{7}&\frac{1}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&-1\end{pmatrix}=$$

$$\bar{C}_N=(-M,-M,-5,0)-(3,2)\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{5}{7}&\frac{6}{7}&-\frac{1}{7}\end{pmatrix}=(-M,-M,-5,0)-\left(-\frac{1}{7},\frac{16}{7},\frac{15}{7},\frac{1}{7}\right)$$

$$\bar{C}_N=\left(-M+\frac{1}{7},-M-\frac{16}{7},-\frac{50}{7},-\frac{1}{7}\right)$$ به جواب بهینه رسیده‌ایم.

$$X_B=\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\\\frac{5}{7}&\frac{1}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{45}{7}\end{pmatrix},\quad x_0=C_BB^{-1}b=(3,2)\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{45}{7}\end{pmatrix}=\frac{102}{7}$$

حل با روش سیمپلکس دو مرحله‌ای:

$$\min y_0=R_1+R_2$$

$X_B=(R_1,R_2),\ X_N=(x_1,x_2,x_3,S_2),\ C_B=(1,1),\ C_N=(0,0,0,0)$

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&-5&1&-1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N=(\bar{C}_{x_1},\bar{C}_{x_2},\bar{C}_{x_3},\bar{C}_{S_2})=(0,0,0,0)-(1,1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&-5&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N=(0,0,0,0)-(1,1)\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&-5&1&-1\end{pmatrix}=(0,0,0,0)-(3,-4,2,-1)=(\underline{-3},4,-2,1)$$

APCO

x_1 وارد پایه خواهد شد.

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix},\quad B^{-1}P_{x_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\theta=\min\left\{\frac{B^{-1}b}{B^{-1}P_{x_1}}\right\}=\min\left\{\overset{R_1}{\frac{7}{1}},\overset{R_2}{\underline{\underline{\frac{10}{2}}}}\right\}=5$$ R_2 از پایه خارج می‌شود

مرحله بعدی: $X_B=(R_1,x_1),\ X_N=(R_2,x_2,x_3,S_2),\ C_B=(1,0),\ C_N=(1,0,0,0)$

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&-5&1&-1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac12\\0&\frac12\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N=(\bar{C}_{R_2},\bar{C}_{x_2},\bar{C}_{x_3},\bar{C}_{S_2})=(1,0,0,0)-(1,0)\begin{pmatrix}1&-\frac12\\0&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&-5&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N=(1,0,0,0)-(1,0)\begin{pmatrix}-\frac12&\frac72&\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac52&\frac12&-\frac12\end{pmatrix}=(1,0,0,0)-\left(-\frac12,\frac72,\frac12,\frac12\right)=\left(\frac32,-\frac72,-\frac12,-\frac12\right)$$

x_2 وارد پایه خواهد شد

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}1&-\frac12\\0&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix},\quad B^{-1}P_{x_2}=\begin{pmatrix}1&-\frac12\\0&\frac12\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac72\\-\frac52\end{pmatrix}$$ R_1 از پایه خارج می‌شود.

مرحله بعدی: $X_B=(x_2,x_1),\ X_N=(R_2,R_1,x_3,S_2),\ C_B=(0,0),\ C_N=(1,1,0,0)$

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\-5&2\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&-1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac27&-\frac17\\\frac57&\frac17\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N=(\bar{C}_{R_2},\bar{C}_{R_1},\bar{C}_{x_3},\bar{C}_{S_2})=(1,1,0,0)-(0,0)\begin{pmatrix}\frac27&-\frac17\\\frac57&\frac17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&-1\end{pmatrix}=(1,1,0,0)$$

پایان فاز اول سیمپلکس ← بعد مسئله را تغییر می‌دهیم

فاز دوم: $X_B=(x_2,x_1),X_N=(R_2,R_1,x_3,S_2),\ C_B=(3,2),\ C_N=(-,-,-5,0)$

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\-5&2\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&-1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac27&-\frac17\\\frac57&\frac17\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_N=(\bar{C}_{R_2},\bar{C}_{R_1},\bar{C}_{x_3},\bar{C}_{S_2})=(-,-,-5,0)-(3,2)\begin{pmatrix}\frac27&-\frac17\\\frac57&\frac17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi&1&1&0\\\phi&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=(-,-,-5,0)-(3,2)\begin{pmatrix}-\frac17&\frac27&\frac17&\frac17\\\frac17&\frac57&\frac67&-\frac17\end{pmatrix}$$

Subject: ۵۲
Year. Month. Date. ( )

۲۶ اردیبهشت امتحان میان‌ترم
مدلسازی و حل با سیمپلکس به صورت کامل

$\bar{C}_N = (-,-,-5,0) - (-\frac{1}{7}, \frac{16}{7}, \frac{15}{7}, \frac{1}{7}) = (-,-,-\frac{50}{7}, -\frac{1}{7}) \rightarrow$ حل بهینه شد.

$$X_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{45}{7} \end{pmatrix} \qquad x_2^* = \frac{4}{7} \quad x_1^* = \frac{45}{7}$$

$$x_0^* = C_B B^{-1} b = (3,2)\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{45}{7} \end{pmatrix} = \frac{102}{7}$$

- تمرین: الف) مسئله را به صورت ترسیمی حل کنید. ب) مسئله را با جدول سیمپلکس، روش M بزرگ و دو مرحله‌ای حل کنید. ج) با سیمپلکس تجدید نظر شده به صورت M بزرگ و دو مرحله‌ای مسئله را حل کنید.

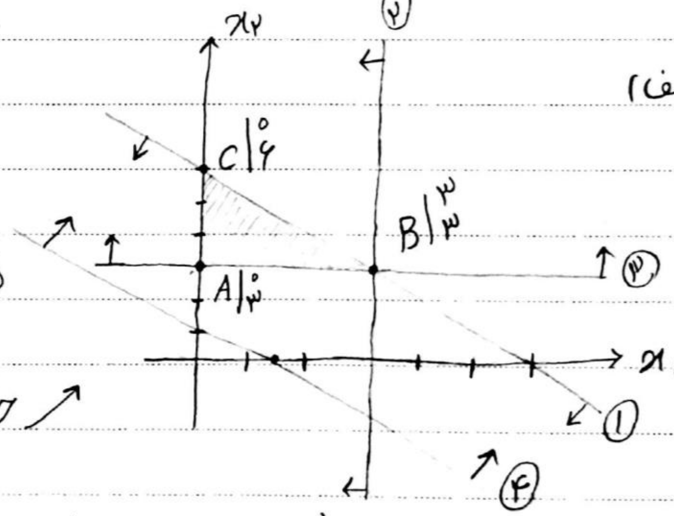
$$\max x_0 = 5x_1 + 3x_2$$
$$\text{st:} \quad x_1 + x_2 \le 6 \quad (1)$$
$$x_1 \ge 3 \quad (2)$$
$$x_2 \ge 3 \quad (3)$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 3 \quad (4)$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

الف)

$A \rightarrow x_0 = 9$
$B \rightarrow x_0 = 24$
$C \rightarrow x_0 = 18$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 3 \\ x_0^* = 24 \end{cases}$$

نقطه B گوشه بهینه است.



حل به روش ترسیمی

ب) $\max x_0 = 5x_1 + 3x_2 - MR_1 - MR_2 - MR_3$

$$x_1 + x_2 + s_1 = 6$$
$$x_1 - s_2 + R_1 = 3$$
$$x_2 - s_3 + R_2 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 - s_4 + R_3 = 3$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \ge 0$$

PAPCO

Subject: ۵۲A
Date

ب)

اساسی	x_0	x_1	x_2	s_2	s_3	s_4	s_1	R_1	R_2	R_3	R.H.S.	
x_0	۱-	۵	۳	۰	۰	۰	۰	$-M$	$-M$	$-M$	۰	
s_1	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۶	
R_1	۰	۱	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۳	
R_2	۰	۰	۱	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۰	۳	
R_3	۰	۲	۳	۰	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۳	
x_0	۱-	$۵+۳M$	$۳+۴M$	$-M$	$-M$	$-M$	۰	۰	۰	۰	$۹M$	
s_1	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۶	
R_1	۰	۱	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۳	
R_2	۰	۰	۱	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۰	۳	
← R_3	۰	۲	$\boxed{۳}$	۰	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۳	$\frac{X-۳-۴M}{۳}$
x_0	۱-	$\frac{M+۹}{۳}$	۰	$-M$	$-M$	$\frac{۳+M}{۳}$	۰	۰	۰	$\frac{-۳-۴M}{۳}$	$۵M-۳$	
s_1	۰	۱/۳	۰	۰	۰	۱/۳	۱	۰	۰	۱/۳-	۵	
R_1	۰	۱	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۳	
R_2	۰	۲/۳-	۰	۰	۱-	۱/۳	۰	۰	۱	۱/۳-	۲	
← x_2	۰	$\boxed{۲/۳}$	۱	۰	۰	۱/۳-	۰	۰	۰	۱/۳	۱	$\frac{-M-۹}{۲}$
x_0	۱-	۰	$\frac{-M-۹}{۲}$	$-M$	$-M$	$\frac{M+۵}{۲}$	۰	۰	۰	$\frac{-۹M-۵}{۶}$	$\frac{۹M-۱۵}{۲}$	
s_1	۰	۰	۱/۲-	۰	۰	۱/۲	۱	۰	۰	۱/۲-	۹/۲	
← R_1	۰	۰	۳/۲-	۱-	۰	$\boxed{۱/۲}$	۰	۱	۰	۱/۲-	۳/۲	$-M-۵$
R_2	۰	۰	۱	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۰	۳	
x_1	۰	۱	۳/۲	۰	۰	۱/۲-	۰	۰	۰	۱/۲	۳/۲	
x_0	۱-	۰	$M+۳$	۵	$-M$	۰	۰	$-M-۵$	۰	$-M$	$۳M-۱۵$	
s_1	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱-	۰	۰	۳	
s_4	۰	۰	۳-	۲-	۰	۱	۰	۲	۰	۱-	۳	
← R_2	۰	۰	$\boxed{۱}$	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۰	۳	$-M-۳$
x_1	۰	۱	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۳	

PAPCO

Subject: ۵۲B
Date

اساسی	x_0	x_1	x_2	S_2	S_3	S_4	S_1	R_1	R_2	R_3	RHS
x_0	-۱	۰	۰	۵	۳	۰	۰	-M-۵	-M-۳	-M	-۲۴
S_1	۰	۰	۰	$\boxed{۱}$	۱	۰	۱	-۱	-۱	۰	۰
S_4	۰	۰	۰	-۲	-۳	۱	۰	۲	۳	-۱	۱۲
x_2	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۰	۳
x_1	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۳
x_0	-۱	۰	۰	۰	-۲	۰	-۵	-M	-M+۲	-M	-۲۴
S_2	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	-۱	-۱	۰	۰
S_4	۰	۰	۰	۰	-۱	۱	۲	۰	۱	-۱	۱۲
x_2	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۰	۳
x_1	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰	-۱	۰	۳

وارد فضای گذشتن شدیم

→ «نقطهٔ B»

جواب بهینه

$$\begin{cases} x_1^* = ۳ \\ x_2^* = ۳ \\ x_0^* = ۲۴ \end{cases}$$

$$\min y_0 = R_1 + R_2 + R_3$$

اساس	y_0	x_1	x_2	S_2	S_3	S_4	S_1	R_1	R_2	R_3	RHS
y_0	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰
S_1	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۶
R_1	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۳
R_2	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۰	۳
R_3	۰	۲	۳	۰	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۳
y_0	-۱	-۳	-۴	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	-۹
S_1	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۶
R_1	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۳
R_2	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۰	۳
R_3	۰	۲	$\boxed{۳}$	۰	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۳

PAPCO

Subject: ۵۲C

Date

اساسی	y_0	x_1	x_2	S_2	S_3	S_4	S_1	R_1	R_2	R_3	R.H.S.
y_0	-1	$-1/3$	0	1	1	$-1/3$	0	0	0	$4/3$	-5
S_1	0	$1/3$	0	0	0	$1/3$	1	0	0	$-1/3$	5
R_1	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	3
R_2	0	$-2/3$	0	0	-1	$\boxed{1/3}$	0	0	1	$-1/3$	2
x_2	0	$2/3$	1	0	0	$-1/3$	0	0	0	$1/3$	1
y_0	-1	-1	0	1	0	0	0	0	1	1	-3
S_1	0	1	0	0	1	0	1	0	-1	0	3
R_1	0	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	0	1	0	0	3
S_4	0	-2	0	0	-3	1	0	0	3	-1	6
x_2	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	3
y_0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
S_1	0	0	0	1	1	0	1	-1	-1	0	0
x_1	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	3
S_4	0	0	0	-2	-3	1	0	2	3	-1	12
x_2	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	3

پایان فاز اول سیمپلکس

اساس	x_0	x_1	x_2	S_2	S_3	S_4	S_1	R_1	R_2	R_3	R.H.S.
x_0	-1	5	3	0	0	0	0	X	X	X	0
S_1	0	0	0	1	1	0	1	-1	-1	0	0
x_1	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	3
S_4	0	0	0	-2	-3	1	0	2	3	-1	12
x_2	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	3
x_0	-1	0	0	5	3	0	0	X	X	X	-24
S_1	0	0	0	$\boxed{1}$	1	0	1	-1	-1	0	0
x_1	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	3
S_4	0	0	0	-2	-3	1	0	2	3	-1	12
x_2	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	3

اساسی	x_0	x_1	x_2	S_2	S_3	S_4	S_1	R_1	R_2	R_3	RHS
x_0	۱-	۰	۰	۰	۲-	۰	۵-	×	×	×	۲۴-
S_2	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱-	۱-	۰	۰
x_1	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱-	۰	۳
S_4	۰	۰	۰	۰	۱-	۱	۲	۰	۱	۱-	۱۲
x_2	۰	۰	۱	۰	۱-	۰	۰	۰	۱	۰	۳

حل بهینه

ج) :

- جلسه هجدهم ۲۴/۱ : زوجیت (دوگان) Duality :

- مثال: یک کارخانه تولید کود شیمیایی دو نوع کود پرفسفات و کم فسفات تولید می‌کند. برای تولید این کودها از سه نوع ماده اولیه ۱، ۲ و ۳ استفاده می‌شود. حداکثر میزان موجودی این مواد به ترتیب ۱۵۰۰، ۱۲۰۰ و ۵۰۰ تن در ماه می‌باشد. برای تولید هر تن کود پرفسفات به ترتیب ۲، ۱ و ۱ تن از مواد اولیه ۱، ۲ و ۳ مورد نیاز است. همچنین برای تولید هر تن کود کم فسفات به ترتیب ۱ و ۱ تن از مواد اولیه نوع ۱ و ۲ مورد نیاز می‌باشد. سود خالص حاصل از فروش هر تن کود پرفسفات و کم فسفات به ترتیب ۱۵ و ۱۰ واحد پول می‌باشد. مدل برنامه‌ریزی خطی برای این کارخانه را بنویسید.

x_1: تولید (تن) کود پرفسفات در ماه

x_2: " " " کم فسفات " "

Primal
اولیه

$$\max x_0 = 15x_1 + 10x_2$$

ماده اولیه ۱ $\quad s.t.: \; 2x_1 + x_2 \le 1500$

ماده اولیه ۲ $\quad x_1 + x_2 \le 1200$

ماده اولیه ۳ $\quad x_1 \le 500$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

یک کارخانه تولید کننده مواد پاک کننده در نزدیکی کارخانه کود شیمیایی وجود دارد که شدیداً به مواد اولیه ۱، ۲ و ۳ نیازمند است و در حال ترغیب کارخانه کود شیمیایی است که از تولید کودهای کم فسفات و پرفسفات دست کشیده و مواد اولیه آنها را مستقیماً بفروشد. مسئله کارخانه پاک کننده، تعیین قیمت خرید این مواد اولیه است. با استفاده از یک مدل ریاضی، این قیمت را تعیین نمایید.

y_1: قیمت هر تن ماده اولیه یک

y_2: قیمت هر تن ماده اولیه دو

y_3: قیمت هر تن ماده اولیه سه

	ماده اولیه ۱	ماده اولیه ۲	ماده اولیه ۳
پرفسفات (هر تن)	۲ تن	۱ تن	۱ تن
کم فسفات (هر تن)	۱ تن	۱ تن	—

ثانویه یا مزدوج یا دوگان

$$\min y_0 = 1500y_1 + 1200y_2 + 500y_3$$
$$\text{st:}\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 15$$
$$y_1 + y_2 \geq 10$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

عایدی حاصل از فروش مواد اولیه یک تن کود پر فسفات	سود یک تن کود پر فسفات
$2y_1+y_2+y_3$	۱۵
عایدی حاصل از فروش مواد اولیه یک تن کود کم فسفات	سود یک تن کود کم فسفات
y_1+y_2	۱۰

ـ ارتباط مسئله اولیه و مزدوج: ۱ـ اگر مسئله اولیه به صورت Max و کوچکتر یا مساوی باشد، در اینصورت مسأله مزدوج به صورت Min و بزرگتر یا مساوی خواهد بود و برعکس. (از این پس این فرم استاندارد مزدوج را در تمام مسائل به کار خواهیم برد.). (مقادیر سمت راست در دوگان می توانند منفی باشند و شاید لازم باشد در منفی ضرب کنیم تا مثلاً کوچکتر مساوی شود.)

۲ـ تعداد متغیرهای مدل مزدوج برابر با تعداد محدودیت های مسئله اولیه و تعداد محدودیت های مسئله مزدوج برابر با تعداد متغیرهای مسئله اولیه می باشد. (ماتریس ضرایب متغیرها در محدودیت ها در مسئله اولیه و مزدوج، ترانهاده ی همدیگر می باشند.)

۳ـ سمت راست محدودیت ها در مسئله اولیه، ضرایب تابع هدف مسئله مزدوج را تشکیل می دهند و ضرایب تابع هدف مسئله اولیه، سمت راست محدودیت های مسئله مزدوج را تشکیل می دهند.

ـ مثال: دوگان مسئله روبرو را بنویسید.

$$\min x_0 = 4x_1 - 3x_2 + 6x_3$$
$$\text{st:}\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \leq 20$$
$$6x_1 + 2x_3 \geq 10$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\xrightarrow[\text{بزرگتر یا مساوی}]{\text{تبدیل به min و}}$$

$$y_1:\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq -20$$
$$y_2:\ 6x_1 + 2x_3 \geq 10$$
$$y_3:\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq -12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max y_0 = -20y_1 + 10y_2 - 12y_3$$
$$st: -2y_1 + 6y_2 - 4y_3 \leq 4$$
$$4y_1 \qquad - 3y_3 \leq -3$$
$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 6$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

فرم کلی: $\max x_0 = CX$ ، $st: AX \leq b$ ، $X \geq 0$ $\Longleftrightarrow$ $\min y_0 = yb$ ، $st: yA \geq C$ ، $y \geq 0$

مثال:

$$\min x_0 = 4x_1 - 3x_2 + 6x_3$$
$$st: 2x_1 - 4x_2 - x_3 \leq 20$$
$$6x_1 \qquad + 2x_3 \geq 10$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\longrightarrow$

$$\min x_0 = 4x_1 - 3x_2 + 6x_3$$
$$st: \; y_1: \; -2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq -20$$
$$y_2: \; 6x_1 \qquad + 2x_3 \geq 10$$
$$\begin{matrix} y_3^+ \\ y_3^- \end{matrix} \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq -12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 12 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

دوگان $\longrightarrow$

$$\max y_0 = -20y_1 + 10y_2 - 12y_3^+ + 12y_3^-$$
$$st: -2y_1 + 6y_2 - 4y_3^+ + 4y_3^- \leq 4$$
$$4y_1 \qquad - 3y_3^+ + 3y_3^- \leq -3$$
$$y_1 + 2y_2 + 2y_3^+ - 2y_3^- \leq 6$$
$$y_1, y_2, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

$\longrightarrow$

$$\max y_0 = -20y_1 + 10y_2 + 12\overbrace{(y_3^- - y_3^+)}^{y_3}$$
$$st: -2y_1 + 6y_2 + 4\overbrace{(y_3^- - y_3^+)}^{y_3} \leq 4$$
$$4y_1 \qquad + 3\overbrace{(y_3^- - y_3^+)}^{y_3} \leq -3$$
$$y_1 + 2y_2 - 2\overbrace{(y_3^- - y_3^+)}^{y_3} \leq 6$$
$$y_1, y_2, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

$\longrightarrow$

$$\max y_0 = -20y_1 + 10y_2 + 12y_3$$
$$st: -2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \leq 4$$
$$4y_1 \qquad + 3y_3 \leq -3$$
$$y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq 6$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

y_3 آزاد در علامت

- نکته: اگر در مسئله اولیه، محدودیتی به فرم مساوی باشد، متغیر مزدوج وابسته به آن محدودیت، متغیر آزاد خواهد بود.

اگر در مسئله اولیه، متغیری آزاد در علامت باشد، محدودیت مزدوج وابسته به آن به شکل تساوی خواهد بود.

- مثال:

$$\max x_0 = 6x_1 - 2x_2 + 12x_3$$
$$y_1: \quad st: 9x_1 - 15x_2 - 4x_3 \le 60$$
$$y_2: \quad 12x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$y_3: \quad 24x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 10 \times (-1)$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \quad x_3 \text{ آزاد}$$

$\rightarrow$

$$\min y_0 = 60y_1 + 5y_2 - 10y_3$$
$$st: 9y_1 + 12y_2 - 24y_3 \ge 6$$
$$-15y_1 + y_2 + y_3 \ge -2$$
$$-4y_1 + 3y_2 - 6y_3 = 12$$
$$y_1, y_3 \ge 0 \quad y_2 \text{ آزاد}$$

- قضیه زوجیت: - قضیه ۱ (قضیه کوچک):

$$x_0 = CX \le (YA)X$$
$$Y(AX) \le Yb = y_0$$

اگر مسئله اولیه به فرم Max و کوچکتر و مسئله مزدوج به فرم min و بزرگتر باشد در اینصورت به ازای تمام حل های

قابل قبول، تابع هدف مسئله اولیه، کوچکتر از تابع هدف مسئله دوگان خواهد بود. تنها در حل بهینه است که تابع

هدف اولیه و دوگان با هم برابر خواهند شد. $(CX^* = Y^*b)$

(نکته مهم)
- قضیه ۲: اگر هر کدام از مسائل اولیه یا دوگان، دارای حل بهینه محدود باشد، دیگری نیز چنین خواهد بود و تابع هدف

هر دو در حل بهینه، برابر خواهند شد، اما اگر یکی از این دو مسئله دارای تابع هدف نامحدود باشد، دیگری نشدنی خواهد بود.
(اما عکس آن الزاماً صادق نیست.)

- جلسه نوزدهم ۱۱/۲۹:

$$\max x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 & \text{st: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ y_2 & \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots & \quad \vdots \qquad \vdots \\ y_m & \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \max x_0 = CX \\ \text{st: } AX \leq b \\ \quad X \geq 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \min y_0 = y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_mb_m \\ x_1 & \text{st: } a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ x_2 & \quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \vdots & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n & \quad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ & \quad y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \min y_0 = yb \\ \text{st: } yA \geq c \\ \quad y \geq 0 \end{array}$$

مرور حالات قبل:

$$BX_B + NX_N = b \quad , \quad BX_B = b - NX_N \rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

$$x_0 = C_BX_B + C_NX_N \rightarrow x_0 = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_NX_N$$

$$x_0 = C_BB^{-1}b + (\underbrace{C_N - C_BB^{-1}N}_{\bar{C}_N})X_N \qquad Y = C_BB^{-1}$$

$$YA \geq C$$

$$C_BB^{-1}(B, N) \geq (C_B, C_N)$$

$$\Downarrow$$

$$C_BB^{-1}B \geq C_B$$

$$C_BB^{-1}N \geq C_N \Rightarrow \underbrace{C_N - C_BB^{-1}N}_{\bar{C}_N} \leq 0$$

همانگونه که از روابط فوق ملاحظه می گردد ، $\bar{C}$ هر متغیر غیراساسی در مسئله اولیه ، برابر است با اختلاف سمت راست و چپ محدودیت مربوط به آن متغیر در مسئله مزدوج . لذا هنگامی که روش سیمپلکس را آغاز می نماییم و مثبت ترین $\bar{C}$ ها را برای ورود به پایه انتخاب می کنیم (تابع هدف Max) ، این امر معادل با انتخاب محدودیت با بیشترین نقض شدگی در مسئله مزدوج می باشد . با وارد کردن این متغیر غیر اساسی به پایه و تبدیل $\bar{C}$ آن به صفر در حقیقت سمت چپ و راست محدودیت مربوطه در مزدوج با هم برابر شده و لذا این محدودیت ، شدنی خواهد بود . روش سیمپلکس تا آنجا ادامه می یابد که برای تمامی متغیرها ، $\bar{C}$ ها یا صفر یا منفی گردند ، که این به معنای آن است که تمامی محدودیت های مسئله مزدوج ارضاء شده اند .

- قضیه مکمل خفیف : اگر در حل بهینه سیمپلکس برای مسئله اولیه ، متغیری در پایه باشد به این معناست که $\bar{C}$ مربوطه مساوی صفر خواهد بود یعنی اختلاف سمت راست و چپ ، محدودیت مربوط به این متغیر در مسئله مزدوج برابر با صفر می باشد به بیان دیگر این محدودیت بایستی در حل بهینه به صورت تساوی ارضاء گردد . ولی اگر متغیری در حل بهینه مسئله اولیه ، غیر اساسی باشد ، طبعاً $\bar{C}$ آن مخالف صفر خواهد بود و این بدین معناست که محدودیت مربوط به این متغیر در حل بهینه مزدوج به صورت نامساوی ارضاء خواهد شد .

- مثال : (حل مزدوج به کمک قضیه مکمل خفیف)

$$\max x_0 = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{array}{ll} y_1 & st:\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ y_2 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array} \longrightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 \\ x_3^* = 2 \end{cases} \Rightarrow x_0^* = 10$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} \begin{array}{ll} & \min y_0 = 4y_1 + 6y_2 \\ x_1: & st:\ 2y_1 + y_2 \overset{\neq}{\ge} 1 \\ x_2 \ne 0 & 2y_1 + 2y_2 \overset{=}{\ge} 4 \\ x_3 \ne 0 & y_1 + 2y_2 \overset{=}{\ge} 3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

$$\xRightarrow{(x_0^* = y_0^*)} \begin{cases} 4y_1^* + 6y_2^* = 10 \\ 2y_1^* + 2y_2^* = 4 \\ y_1^* + 2y_2^* = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_1^* = 1,\ y_2^* = 1}$$

- مثال:

$$\max x_0 = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{array}{l} st:\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3\ \text{آزاد} \end{array} \longrightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{ll} & \max x_0 = x_1 - 4x_2' + 3x_3 \\ y_1: & st:\ 2x_1 - 3x_2' - 5x_3 \overset{\neq}{\le} 2 \\ y_2 = 0 & -3x_1 - x_2' - 6x_3 \overset{\neq}{\le} -1 \\ y_3 \ne 0 & x_1 - x_2' + x_3 \overset{=}{=} 4 \end{array}$$

$$x_2' = -x_2 \longrightarrow x_2' \ge 0,\ x_1 \ge 0,\ x_3\ \text{آزاد}$$

لازم نیست استاندارد شود.
برعکس عمل می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} \begin{array}{ll} & \min y_0 = 2y_1 - y_2 + 4y_3 \\ x_1^* = 0 & st:\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 \overset{\neq}{\ge} 1 \\ x_2^* = 0 & -3y_1 - y_2 - y_3 \overset{\neq}{\ge} -4 \\ x_3^* \ne 0 & -5y_1 - 6y_2 + y_3 \overset{=}{=} 3 \\ & y_3\ \text{آزاد},\ y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{x_0^* = y_0^*} \begin{cases} -5y_1^* - 6y_2^* + y_3^* = 3 \\ 2y_1^* - y_2^* + 4y_3^* = 12 \end{cases} \rightarrow ?$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 0 \\ y_2^* = 0 \\ y_3^* = 3 \end{cases}$$

- نکته: اگر سوال حل دادند و گفتند که آیا این حل برای مسئله بهینه است یا نه، بلافاصله مزدوج را تشکیل می‌دهیم، اگر جواب بهینه در مسئله مزدوج رسیدیم، پس یعنی جواب اولیه، بهینه بوده است.

- تمرین: با استفاده از قضیه مکمل خفیف، حل بهینه مزدوج را بدست آورید.

$$\max x_0 = 0.75x_1 - 20x_2 + 0.5x_3 - 6x_4$$
$$st: \; -0.25x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 \geq 0$$
$$-0.5x_1 + 12x_2 + 0.5x_3 - 3x_4 = 0$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1^* = 1 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = 1 \\ x_4^* = 0 \end{cases} \qquad 0.25x_1 - 8x_2 - x_3 + x_4 \leq 0$$

$$\rightarrow x_0^* = 1.25$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} \min y_0 = y_3$$
$$st: \begin{cases} 0.25y_1 - 0.5y_2 \overset{=}{\geq} 0.75 \\ -8y_1 + 12y_2 \geq -20 \\ -y_1 + 0.5y_2 + y_3 \overset{=}{\geq} 0.5 \\ y_1 - 3y_2 \geq -6 \end{cases}$$
$y_1, y_3 \geq 0$ ، y_2 آزاد در علامت

$$\rightarrow \begin{cases} y_3 = 1.25 \\ 0.25y_1 - 0.5y_2 = 0.75 \\ -y_1 + 0.5y_2 + y_3 = 0.5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1^* = 0 \\ y_2^* = -1.5 \\ y_3^* = 1.25 \end{cases} , \quad y_0^* = 1.25$$

- مثال:

$$\begin{array}{ccc} \max & & \min \\ \leq & \Longleftrightarrow & \geq \end{array}$$ $\longrightarrow$ تضمین ← همیشه متغیرها مزدوج غیرمنفی خواهند بود.

$$\underset{\min}{\max}\, x_0 = 4x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$st: \; 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \underset{\geq}{\leq} 10$$
$$9x_1 + 8x_2 - x_3 \underset{\geq}{\leq} 12$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \underset{\geq}{\leq} 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\underset{\min}{\max}\, x_0 = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$
$$st: \; 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \pm s_1 = 10$$
$$9x_1 + 8x_2 - x_3 \pm s_2 = 12$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \pm s_3 = 15$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$\underset{\max}{\min}\, y_0 = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3$$
$$st: \; 2y_1 + 9y_2 + y_3 \underset{\leq}{\geq} 4$$
$$-4y_1 + 8y_2 + y_3 \underset{\leq}{\geq} 3$$
$$3y_1 - y_2 + y_3 \underset{\leq}{\geq} -1$$
$$\begin{matrix} +y_1 \\ -y_1 \end{matrix} \underset{\leq}{\geq} 0 \qquad \begin{matrix} +y_2 \\ -y_2 \end{matrix} \underset{\leq}{\geq} 0 \qquad \begin{matrix} -y_3 \\ +y_3 \end{matrix} \underset{\leq}{\geq} 0$$

برای تشخیص مثبت یا منفی بودن علامت متغیرها در مسئله مزدوج، ابتدا به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم و....

- جلسه بیستم ۱۳،۱۰

$$\max x_0 = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0s_2$$

$$\begin{aligned} y_1 \quad st:\; & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 4 \\ y_2 \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_2 = 6 \\ & s_1, s_2, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\min y_0 = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{aligned} st:\; & 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & 2y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R.H.S
x_0	-1	1	4	3	0	0	0
s_1	0	2	$\boxed{2}$	1	1	0	4
s_2	0	1	2	2	0	1	6
x_0	-1	-3	0	+1	-2	0	-8
x_2	0	1	1	1/2	1/2	0	2
s_2	0	-1	0	$\boxed{1}$	-1	1	2
x_0	-1	-2	0	0	-1	-1	-10
x_2	0	3/2	1	0	1	-1/2	1
x_1	0	-1	0	1	-1	1	2

$$\bar{C}_{s_1} = C_{s_1} - C_B B^{-1} P_{s_1}$$

$$\bar{C}_{s_1} = 0 - C_B B^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -C_B B^{-1} = -Y$$

برای متغیر مصنوعی: $\bar{C}_{R_1} = C_{R_1} - C_B B^{-1} P_{R_1} = -M - C_B B^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -M - Y$

- اگر ضرایب تابع هدف را منفی در نظر می گرفتیم، آنگاه: $x_0 = C_B B^{-1} b - \underbrace{(C_B B^{-1} N - C_N)}_{\bar{C}_N} X_N$

- تجزیه و تحلیل حساسیت:

نجاری و ...

- مثال: کارخانه ای چهار نوع میز تولید می نماید که آنها را با شماره ۱ تا ۴ مشخص می نماییم. دو کارگاه درودگری و تکمیلی در تولید این میزها شرکت دارند. جدول زیر نفر-ساعت مورد نیاز برای تولید هر میز در هر کارگاه را

finishing (پرداخت کاری، نقاشی و ...)

Subject: یعنی ۳ نفر هر کدام ۲ ساعت (واحد زمانی)
Date

میز	1	2	3	4
درودگری	4	9	6	10
تکمیلی	1	1	3	40
سود	12	20	18	40

به همراه سود هر میز ارائه می دهد. ظرفیت در دسترس کارگاه درودگری در طی یک ماه آینده ۶۰۰۰ نفر-ساعت و کارگاه تکمیلی ۴۰۰۰ نفر-ساعت می باشد.

x_i: تعداد میز تولید شده در ماه آینده از نوع i

$$\max x_0 = 12x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 40x_4$$
$$\text{st: } 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 + s_1 = 6000$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 + s_2 = 4000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \geq 0$$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	R.H.S.
x_0	-1	12	20	18	40	0	0	0
s_1	0	4	9	7	10	1	0	6000
s_2	0	1	1	3	40	0	1	4000

★ تولید میز x_2 و x_3 به صرفه نیست.

(با توجه به حل بهینه)

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
x_0	-1	0	$-20/3$	$-10/3$	0	$-\frac{44}{15}$	$-\frac{4}{15}$	-18667
x_1	0	1	$7/3$	$5/3$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	1333.3
x_4	0	0	$-1/30$	$1/30$	1	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	66.6

- در مسئله این فرض کنید یک میز جدید به نام میز شماره ۵ طراحی شده است که نیاز به ۶ نفر-ساعت در کارگاه درودگری و دو نفر-ساعت در کارگاه تکمیلی دارد. سود این میز، ۱۸ واحد پول در نظر گرفته شده است. آیا تولید این میز به صرفه می باشد؟ (یعنی در حل بهینه x_5 در پایه باشد و مقدار بگیرد.)

اگر $\bar{c}_{x_5}$ را با توجه به اطلاعات جدول بهینه محاسبه نماییم، از دو حال خارج نخواهد بود. اگر $\bar{c}_{x_5}$ مثبت شود،

★ تفاوت سود در حسابداری و دیدِ سیستم و تحقیق در عملیات (مثال: کارخانه شیرآلات)

بدین معناست که متغیر x_5 باید وارد پایه شود، لذا حل بهینه هنوز حاصل نشده و ادامه پیدا خواهد کرد.

ولی اگر $\bar{C}_{x_5}$ منفی گردد به این معناست که این متغیر غیراساسی بوده و حل بهینه قبلی تغییر نمی‌کند.

$X_B=(x_1,x_4)\,,\ X_N=(x_2,x_3,s_1,s_2)$

$C_B=(12,40)\,,\ C_N=(20,18,0,0)\,,\ B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{15} & -\frac{1}{15}\\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75}\end{pmatrix}$

$\bar{C}_{x_5}=C_{x_5}-C_BB^{-1}P_{x_5}=18-(12,40)\begin{pmatrix}\frac{4}{15} & -\frac{1}{15}\\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

$\bar{C}_{x_5}=18-\left(\frac{44}{15},\frac{4}{15}\right)\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}=18-\frac{272}{15}=-\frac{2}{15}<0 \longrightarrow$ تولیدش به صرفه نیست.

$B^{-1}P_{x_5}=\begin{pmatrix}\frac{4}{15} & -\frac{1}{15}\\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{22}{15}\\ \frac{2}{150}\end{pmatrix}\to$ اگر $\bar{C}_{x_5}$ مثبت می‌شد: ... ← با سیمپلکس ادامه حل

- مسئله ۲: سود هر میز شماره ۵ چقدر تغییر یابد تا تولید آن با صرفه گردد؟ اگر $C_{x_5}>18+\frac{2}{15}$ می‌بود، تولیدش به صرفه می‌شد. $\bar{C}$ یک متغیر غیراساسی در حل بهینه نشان دهنده حداقل مقدار تغییر در ضریب تابع هدف آن متغیر می‌باید تا بتواند وارد پایه گردد.

- مسئله ۳: زمان مورد نیاز میز شماره ۵ در کارگاه درودگری، چقدر کاهش یابد تا تولید آن با صرفه گردد؟

$\bar{C}_{x_5}=C_{x_5}-C_BB^{-1}P_{x_5}=18-(12,40)\begin{pmatrix}\frac{4}{15} & -\frac{1}{15}\\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6-\alpha\\2\end{pmatrix}$

$=18-(12,40)\begin{pmatrix}\frac{22-4\alpha}{15}\\ \frac{\alpha-2}{150}\end{pmatrix}>0 \to 18-\left(\frac{264-48\alpha}{15}+\frac{40\alpha-80}{150}\right)>0$

PAPCO

ISO 9000 → داخل سیستم
ISO 14000 → محیط زیستی
ISO 26000 → مسئولیت‌های اجتماعی

★ ماکزیمم کردن مطلوبیت + { در نظر گرفتن آزادی‌های فردی و انسانی / نباید ناقض فضائل اخلاقی باشد. (امروزه اهمیت دارد.)

$$\bar{C}_{x_5} = 18 - \left(\frac{2640 - 4800\alpha + 40\alpha - 80}{150}\right) > 0 \rightarrow 18 - \left(\frac{2560 - 4400\alpha}{150}\right) > 0$$

$$\bar{C}_{x_5} = \frac{2700 - 2560 + 4400\alpha}{150} = \frac{140 + 4400\alpha}{150} > 0 \Rightarrow \alpha > 0.3$$

اگر حداقل ۰٫۳ نفر-ساعت کم شود، تولیدش به صرفه می‌شود.

- جلسه ۲۱ - ۵٫۲ : تغییر در مقادیر سمت راست محدودیت‌ها :

- مسئله : در مثال داده شده دامنه تغییرات ظرفیت کارگاه تکمیل را چنان تعیین کنید که تولید میزهای ۱ تا ۴ کماکان به صرفه باشد؟

$$X_B = (x_1, x_4), \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6000 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6000 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24000}{15} - \frac{\alpha}{15} \\ -\frac{6000}{150} + \frac{2\alpha}{75} \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq 24000 \\ \alpha \geq 1500 \end{cases}$$

$$\boxed{1500 \leq \alpha \leq 24000}$$

- مسئله : مدیریت ناچار شده است که ظرفیت کارگاه تکمیل را به ۱۱۲۵ نفر-ساعت کاهش دهد. حل بهینه جدید چه خواهد بود؟

$$B^{-1}b_{\text{جدید}} = \begin{pmatrix} \frac{24000}{15} - \frac{1125}{15} \\ -\frac{6000}{150} + \frac{2\times 1125}{75} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1525 \\ -10 \end{pmatrix}$$

از روش سیمپلکس مزدوج، هنگامی استفاده می‌شود که ضرایب تابع هدف در جدول نهایی سیمپلکس، نشان دهنده رسیدن به حل بهینه باشند ولی در سمت راست جدول، حداقل یک مقدار منفی وجود داشته باشد.

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	R.H.S.
x_0	-1	0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{44}{15}$	$-\frac{4}{15}$	-17900
x_1	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	1525
x_4	0	0	$\boxed{-\frac{1}{30}}$	$\frac{1}{30}$	1	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	-10
x_0	-1	0	0	-10	-200	$-\frac{24}{15}$	$-\frac{84}{15}$	-15900
x_1	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	$+70$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{5}$	825
x_2	0	0	1	-1	-30	$\frac{1}{5}$	$-\frac{60}{75}$	300

$\bar{b} = B^{-1}\underline{b}$

$x_0 = C_B B^{-1}\underline{b}$

$x_0 = (12, 40)\begin{pmatrix}1525\\-10\end{pmatrix} = 17900$

مراحل روش سیمپلکس مزدوج: ۱- منفی‌ترین عنصر در سمت راست جدول را تعیین نموده و متغیر مربوطه را به عنوان متغیر خارج شونده از پایه در نظر بگیرید. ۲- ضرایب تابع هدف را بر عناصر منفی، متغیر کاندید شده برای خروج از پایه تقسیم نمایید. کوچکترین قدر مطلق حاصل تقسیم، نشان دهنده متغیر ورودی به پایه خواهد بود. ۳- عنصری را در جدول که در محل برخورد متغیرهای ورودی و خروجی قرار دارد، به عنوان عنصر پاشنه گردی تعیین نموده و همانند سیمپلکس عادی، حل را ادامه دهید.

- تمرین: دامنه تغییرات ظرفیت کارگاه درودگری را چنان تعیین نمایید که تولید میزهای ۱ و ۴ همچنان با صرفه

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 4000 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{4\beta}{15} - \frac{4000}{15} \geq 0 \Rightarrow \beta \geq 1000 \\ -\frac{\beta}{150} + \frac{8000}{75} \geq 0 \Rightarrow \beta \leq 16000 \end{cases}$$ باشد

← مادامی که $1000 \leq \beta \leq 16000$ باشد، x_1 و x_4 در پایه خواهند ماند.

- تمرین: اگر ظرفیت کارگاه درودگری به ۴۵۰ نفر-ساعت کاهش یابد، حل بهینه جدید چه خواهد بود؟

$$\beta = 450 \Rightarrow \bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{4\beta - 4000}{15} \\ \frac{16000 - \beta}{150} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{440}{3} \\ \frac{311}{3} \end{pmatrix} \rightarrow$$ منفی شد. ← باید با سیمپلکس دوگان حل کنیم.

$$x_0' = (12, 40)\begin{pmatrix} -\frac{440}{3} \\ \frac{311}{3} \end{pmatrix} = -\frac{4696}{3}$$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	R.H.S.
x_0	-1	0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{44}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{4696}{3}$
x_1	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	$\boxed{-\frac{1}{15}}$	$-\frac{440}{3}$
x_4	0	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	1	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{311}{3}$
x_0	-1	-4	-16	-10	0	-4	0	$-\frac{2336}{3}$
S_2	0	-15	-35	-25	0	-4	1	2200
x_4	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{27}{30}$	$\frac{21}{30}$	1	$\frac{1}{10}$	0	45

- مسئله ۴: تغییر ضرایب تابع هدف متغیرهای اساسی:

در صورتی که ضریب تابع هدف یک متغیر غیراساسی در جدول نهایی سیمپلکس تغییر داده شود، تنها باعث خواهد شد که $\bar{C}$ همین متغیر در جدول نهایی سیمپلکس تغییر یابد که می‌تواند منجر به ورود یا عدم ورود این متغیر به پایه گردد و $\bar{C}$ تمامی دیگر متغیرها، بدون تغییر باقی خواهد ماند ولی اگر ضریب تابع هدف، یک متغیر اساسی تغییر داده شود،

این تغییر باعث تغییر در C_B خواهد بود که به نوبه خود، $\bar{C}$ تمامی متغیرهای غیراساسی را تحت تأثیر قرار خواهد داد.

مثال: اگر سود حاصل از فروش هر عدد میز شماره ۱، از ۱۲ به ۹ تغییر یابد، حل بهینه جدید چه خواهد بود؟

$$X_B=(x_1, x_4) \qquad C_B=(9, 40) \qquad \bar{C}_N=(\bar{c}_{x_2}, \bar{c}_{x_3}, \bar{c}_{s_1}, \bar{c}_{s_2})$$

$$X_N=(x_2, x_3, s_1, s_2) \qquad C_N=(20, 18, 0, 0) \qquad = C_N - C_B B^{-1} N$$

$$\bar{C}_N=(20, 18, 0, 0)-(9, 40)\begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{32}{5}, -\frac{7}{15}\right)$$

$$x_0=C_B B^{-1} b=(9, 40)\begin{pmatrix} 133.3 \\ 66.6 \end{pmatrix}=14667$$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	s_1	s_2	R.H.S.
x_0	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{32}{15}$	$-\frac{7}{15}$	-14667
← x_1	0	1	$\frac{7}{3}$	$\boxed{\frac{5}{3}}$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	133.3
x_4	0	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	1	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	66.6
x_0	-1							
x_3	0							
x_4	0							

→ حل دیگر بهینه نیست.

- تمرین: اگر ضریب تابع هدف متغیر x_1، از ۱۲ به ۲۰ تغییر یابد، حل بهینه جدید چه خواهد بود؟

- دامنه تغییرات ضرایب تابع هدف متغیرهای اساسی: - جلسه ۲۲ _ ۲۰/۷

در مثال قبل، ضریب تابع هدف متغیر x_4، حداقل و حداکثر چقدر باشد تا حل بهینه موجود تغییر نکند؟

حل:

(دامنه‌ای از تغییرات، ضریب تابع هدف متغیر x_4 چه باید باشد تا $\bar{C}$ هیچ یک از متغیرهای غیراساسی در جدول بهینه موجود، شروع به مثبت شدن نکند. چرا که در این حال ناچار خواهیم بود، متغیر $\bar{C}$ آن مثبت شده است، وارد پایه نماییم و لذا حل بهینه تغییر خواهد کرد.)

$$\max x_0 = 12x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 40x_4$$

$$\begin{aligned} st:\ & 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 + s_1 = 6000 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 + s_2 = 4000 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
x_0	1	0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{44}{15}$	$-\frac{4}{15}$	-18667
x_1	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	1333,3
x_4	0	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	1	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	66,6

تابع هدف Max :

$$\begin{cases} \min c_i = c_i^0 + \max\limits_{\alpha_i^j > 0} \left\{ \dfrac{\bar{c}_j}{\alpha_i^j} \right\} \\ \max c_i = c_i^0 + \min\limits_{\alpha_i^j < 0} \left\{ \dfrac{\bar{c}_j}{\alpha_i^j} \right\} \end{cases}$$

تابع هدف Min :

$$\begin{cases} \max c_i = c_i^0 + \min\limits_{\alpha_i^j > 0} \left\{ \dfrac{\bar{c}_j}{\alpha_i^j} \right\} \\ \min c_i = c_i^0 + \max\limits_{\alpha_i^j < 0} \left\{ \dfrac{\bar{c}_j}{\alpha_i^j} \right\} \end{cases}$$

در روابط فوق، i اندیس یک متغیر اساسی و j اندیس یک متغیر غیر اساسی می‌باشد. c_i^0 مقدار اولیه ضریب تابع هدف متغیر اساسی i ام می‌باشد. $\bar{c}_j$ ضریب تابع هدف متغیر غیر اساسی j ام در جدول بهینه داده شده است. α_i^j نیز مقداری در درون جدول است که در محل تقاطع متغیر اساسی i ام و متغیر غیر اساسی j ام قرار دارد.

$$\begin{cases} \min c_{x_4} = 40 + \max \left\{ \dfrac{-\frac{10}{3}}{\frac{1}{30}}, \dfrac{-\frac{4}{15}}{\frac{2}{75}} \right\} = 40 - 10 = 30 \\ \max c_{x_4} = 40 + \min \left\{ \dfrac{-\frac{20}{3}}{-\frac{1}{30}}, \dfrac{-\frac{44}{15}}{-\frac{1}{150}} \right\} = 40 + 200 = 240 \end{cases} \Rightarrow 30 \leq c_{x_4} \leq 240$$

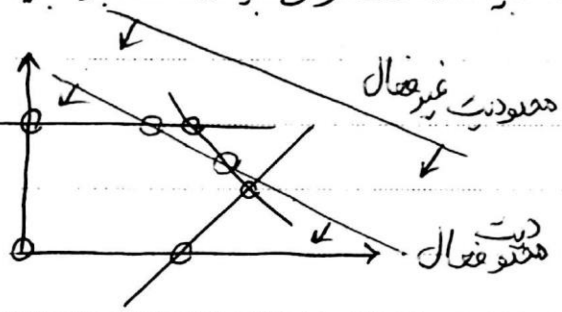
مثال: دامنه تغییرات ضریب تابع هدف متغیر اساسی x_1 را به گونه‌ای تعیین نمایید که پایه فعلی در جدول بهینه تغییر نکند.

$$\begin{cases} \min c_{x_1} = 12 + \max \left\{ \overset{-\frac{20}{7}}{\cancel{\dfrac{-\frac{20}{3}}{\frac{7}{3}}}}, \overset{-2}{\cancel{\dfrac{-\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}}}}, \overset{-11}{\cancel{\dfrac{-\frac{44}{15}}{\frac{4}{15}}}} \right\} = 12 - 2 = 10 \\ \max c_{x_1} = 12 + \min \left\{ \dfrac{-\frac{4}{15}}{-\frac{1}{15}} \right\} = 12 + 4 = 16 \end{cases} \Rightarrow 10 \leq c_{x_1} \leq 16$$

- هرکدام از این حدود را اگر بتوانیم بنویسیم، یعنی آن ضریب می‌تواند تا $+\infty$ یا $-\infty$ برود.

- اضافه کردن محدودیت جدید:

- نکته: هنگامی که یک محدودیت جدید به مدل افزوده می‌شود، قبل از هر اقدامی، حل بهینه موجود را در محدودیت جدید قرار دهید، اگر این محدودیت ارضاء گردد، بدین معناست که حل بهینه موجود نیازی به تغییر کردن ندارد ولی اگر حل بهینه فعلی، محدودیت جدید را نقض نماید، اصطلاحاً گویند که محدودیت جدید فعال است و می‌بایستی حتماً جدول بهینه سیمپلکس دچار تغییر گردد.



- مثال: فرض کنید محدودیت جدید به مدل قبل اضافه گردد، دال بر اینکه مجموع تولید از تمام میزها باید از ۱۳۸۰ عدد بیشتر باشد. حل مسئله چه تغییری خواهد کرد؟

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \geq ۱۳۸۰$$

$x_1^*=۱۳۳۳{,}۳ ,\ x_4^*=۶۶{,}۶ \Rightarrow ۱۳۳۳{,}۳+0+0+۶۶{,}۶ \geq ۱۳۸۰$ حل مسئله تغییر نخواهد کرد.

- مثال: اگر محدودیت زیر به مدل اضافه شود، حل مسئله چه تغییری خواهد کرد؟

$$x_1+\frac{101}{30}x_2+\frac{19}{30}x_3-x_4 \leq ۱۱۶۶{,}۶ \rightarrow x_1+\frac{101}{30}x_2+\frac{19}{30}x_3-x_4+S_3=۱۱۶۶{,}۶$$

$x_1^*=۱۳۳۳{,}۳ ,\ x_4^*=۶۶{,}۶ \Rightarrow ۱۳۳۳{,}۳+0+0-۶۶{,}۶ \not\leq ۱۱۶۶{,}۶ \rightarrow$ حل بهینه تغییر خواهد کرد.

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	R.H.S.
x_0	-1	0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{44}{15}$	$-\frac{4}{15}$	0	-18667
x_1	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	0	1333.3
x_4	0	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	1	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	0	66.6
s_3	0	1	$\frac{101}{30}$	$\frac{19}{30}$	-1	0	0	1	1166.6
x_0	-1	0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{44}{15}$	$-\frac{4}{15}$	0	-18667
x_1	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	0	1333.3
x_4	0	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	1	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	0	66.6
s_3	0	0	1	$\boxed{-1}$	0	$-\frac{41}{150}$	$\frac{7}{75}$	1	-100
x_0	-1	0	-10	0	0	$-\frac{91}{45}$	$-\frac{130}{225}$	$-\frac{10}{3}$	-18333.6
x_1	0	1	4	0	0	$-\frac{17}{90}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{5}{3}$	1166.6
x_4	0	0	0	0	1	$-\frac{71}{4500}$	$\frac{67}{2250}$	$\frac{1}{30}$	63.3
x_3	0	0	-1	1	0	$\frac{41}{150}$	$-\frac{7}{75}$	-1	100

$-R_1+R_3$

R_2+R_3

باید جدول را به هنگام کنیم.

اگر محدودیت اضافه شده توسط حل بهینه نقض شود، حتماً هنگام update کردن، یکی از مقادیر سمت راست منفی می‌شود (حداقل ۱).

↓

سیمپلکس دوگان

- تمرین: یک مدل برنامه‌ریزی خطی و جدول بهینه آن به صورت زیر داده شده است:

$$\max x_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$
$$\text{st:}\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

اساس	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	R_1	R.H.S.
x_0	-1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{141}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$

الف) اگر سمت راست مدل، از ۵ و ۲ به ۵ و ۱۲ تغییر نماید، حل بهینه جدید چه خواهد بود؟

ب) دامنه تغییرات ضرایب تابع هدف x_1 و x_2 را به گونه‌ای تعیین نمایید که حل بهینه موجود، تغییر نکند؟

ج) اگر تابع هدف مسئله به فرم جدید زیر تغییر نماید، حل بهینه جدید چه خواهد بود؟

$$\max x_0' = 5x_1 - 5x_2 + 4x_3$$

Subject: ٧١
Date

د) محدودیت جدید به صورت $x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4$ به مسئله افزوده شده است، حل بهینه جدید چه خواهد بود؟

هـ) اگر متغیر جدیدی به نام x_6 با ضریب تابع هدف ۴ و ضریب ۱ در محدودیت اول و ضریب ۴ در محدودیت دوم، به مسئله افزوده شود، حل بهینه جدید چه خواهد بود؟

- جلسه ۲۳ - ۲،۱۲: - برنامه ریزی خطی پارامتری:

$$\min x_0 = (10\theta - 4)x_1 + (4\theta - 8)x_2$$
$$st: \quad x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3 - \theta$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

فرض $\theta \geq 0$ - در برنامه ریزی خطی پارامتری، ابتدا θ را برابر با صفر در نظر گرفته و حل بهینه مدل را بدست آورید. این حل را به عنوان حل پایه خود در نظر خواهیم گرفت. حال θ را بتدریج تغییر دهید تا به جایی که یا ضریب تابع هدف یکی از متغیرها چنان تغییر کند که آن متغیر در آستانه ورود به پایه باشد $(\theta = \theta_1)$ و یا آنکه یکی از مقادیر به هنگام شده سمت راست محدودیت‌ها شروع به منفی شدن نماید $(\theta = \theta_2)$. اینکه کدام اقدام مناسب صورت بپذیرد، بستگی به این خواهد داشت که θ_1 زودتر رخ داده یا θ_2. با به هنگام کردن جدول سیمپلکس به ازای $\theta' = \min\{\theta_1, \theta_2\}$ مجدداً تغییرات θ از همین نقطه بررسی خواهد شد.

$\theta = 0 \quad \theta' \quad \theta$

$\downarrow \theta = 0$

$$\min x_0 = -4x_1 - 8x_2$$
$$st: \quad x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$X_B = (s_1, x_2)$

$X_N = (x_1, s_2)$

اساس	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S.
x_0	-1	12	0	0	8	24
s_1	0	-1	0	1	-1	1
x_2	0	2	1	0	1	3

↑ حل بهینه ↑

$$\bar{C}_N = C_N - C_B B^{-1} N = (\bar{c}_{x_1}, \bar{c}_{s_2}) = [10\theta-4, 0] - [0, 4\theta-8]\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= [10\theta-4, 0] - [0, 4\theta-8]\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = [10\theta-4, 0] - [8\theta-16, 4\theta-8]$$

$$\Rightarrow (\bar{c}_{x_1}, \bar{c}_{s_2}) = [(2\theta+12), (8-4\theta)] \rightarrow \begin{cases} 2\theta+12 \leq 0 \rightarrow \theta \leq -6 \\ 8-4\theta \leq 0 \rightarrow \boxed{\theta \geq 2} \end{cases} \rightarrow \theta_1 = 2 \checkmark$$

$\theta = 2$ ↳ 16 ↳ 0

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 3-\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-3+\theta\\ 3-\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\theta\\ 3-\theta\end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 1+\theta \leq 0 \rightarrow \theta \leq -1 \\ 3-\theta \leq 0 \rightarrow \boxed{\theta \geq 3} \end{cases} \rightarrow \theta_2 = 3$$

$\theta = 2$ ↳ $\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

اساس	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S.
x_0	-1	16	0	0	0	0
s_1	0	-1	0	1	-1	3
x_2	0	2	1	0	$\boxed{1}$	1
x_0	-1	16	0	0	0	0
s_1	0	1	1	1	0	4
s_2	0	2	1	0	1	1

$X_B = (s_1, x_2)$

$C_B = (0, 4\theta-8)$

$C_B B^{-1} b = (0, 0)\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix} = 0$

$\bar{C}_N = C_N - C_B B^{-1} N$

$X_B = (s_1, s_2)$

$X_N = (x_1, x_2)$

$C_B = (0, 0)$, $C_N = [(10\theta-4), (4\theta-8)]$

$B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$(\bar{c}_{x_1}, \bar{c}_{x_2}) = [(10\theta-4), (4\theta-8)] - (0, 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = [\underbrace{(10\theta-4)}_{\bar{c}_{x_1}}, \underbrace{(4\theta-8)}_{\bar{c}_{x_2}}]$$

$$\begin{cases} 10\theta-4 \leq 0 \Rightarrow \theta \leq \frac{4}{10} \\ 4\theta-8 \leq 0 \Rightarrow \theta \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

به ازای $\theta > 2$، ضرایب تابع هدف دیگر تغییر نمی‌کنند.

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 3-\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 3-\theta\end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \theta \geq 3$$

$\theta = 0$ — $\theta_1 = 2$ — $\theta_2 = 3$ → θ

$$\bar{c}_{x_1} = 10\theta - 4$$
$$\bar{c}_{x_2} = 4\theta - 8$$

به ازای $\theta \geq 3$، مسئله نشدنی خواهد بود.

اساس	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
x_0	-1	26	4	0	0	0
s_1	0	1	1	1	0	4
s_2	0	2	1	0	1	0

مثال: مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. تغییرات θ را به گونه‌ای بدست آورید که حل بهینه فعلی تغییر ننماید؟

$$\min x_0 = -3x_1 - (6+4\theta)x_2$$
$$\text{st: } (1+2\theta)x_1 + s_1 = 4+8\theta$$
$$(3-3\theta)x_1 + 2x_2 + s_2 = 18-34\theta$$
$$\theta \geq 0 \qquad s_1, s_2, x_1, x_2 \geq 0$$

$\theta = 0 \rightarrow$

$$\min x_0 = -3x_1 - 6x_2$$
$$\text{st: } x_1 + s_1 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 + s_2 = 18$$
$$s_1, s_2, x_1, x_2 \geq 0$$

اساس	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
x_0	-1	6	0	0	3	-54
s_1	0	1	0	1	0	4
x_2	0	3/2	1	0	1/2	9

θ: $X_B = (s_1, x_2)$ $\qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$C_B = (0, -6-4\theta)$

$X_N = (x_1, s_2) \qquad C_N = (-3, 0)$

$N = \begin{pmatrix} 1+2\theta & 0 \\ 3-3\theta & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{C}_N = C_N - C_B B^{-1} N$

$$\bar{C}_N = (\bar{c}_{s_1}, \bar{c}_{x_2}) = (-3, 0) - (0, (-6-4\theta)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2\theta & 0 \\ 3-3\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-3, 0) - (0, (-6-4\theta)) \begin{pmatrix} 1+2\theta & 0 \\ \frac{3-3\theta}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-3, 0) - \left(\frac{(-6-4\theta)(3-3\theta)}{2}, \frac{-6-4\theta}{2} \right)$$

$$= \left(-3 - \frac{(-18+18\theta-12\theta+12\theta^2)}{2}, \frac{6+4\theta}{2} \right) = (6-3\theta-6\theta^2, 3+2\theta)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 6-3\theta-6\theta^2 \geq 0 \\ 3+2\theta \geq 0 \end{cases}$$

★متغیر اساسی، معمولاً ضریب پارامتری نمی گیرند.

$$B^{-1}b \geq 0 \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4+8\theta_1\\ 18-34\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+8\theta\\ 9-17\theta\end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow \begin{cases}4+8\theta \geq 0\\ 9-17\theta \geq 0\end{cases}$$

- تمرین: فصل ۶: در زوله شماره ۷ ـ ۸ ـ ۹ ـ ۲۴

- جلسه ۲۴ ـ ۱۴/۲/۱۰: ـ برنامه ریزی حمل و نقل:

- مثال: چهار پمپ بنزین A، B، C و D به ترتیب نیازمند ۵ هزار، ۴ هزار، ۶ هزار و ۴ هزار لیتر بنزین در روز می باشند. این مقادیر از سه پالایشگاه ۱، ۲ و ۳ تأمین می گردند که تولید روزانه آنها به ترتیب ۸ هزار، ده هزار و ۵ هزار لیتر بنزین می باشد. جدول زیر هزینه حمل و نقل هر ده هزار لیتر بنزین را از پالایشگاه ها به پمپ بنزین ها نشان می دهد. یک برنامه حمل و نقل روزانه بنزین از پالایشگاه ها به پمپ بنزین ها به گونه ای تنظیم نمایید که مجموع هزینه های حمل و نقل حداقل گردد؟

پالایشگاه \ پمپ بنزین	A	B	C	D
۱	۷۰	۴۰	۴۰	۴۰
۲	۵۰	۸۰	۴۰	۷۰
سه	۸۰	۵۰	۸۰	۴۰

x_{ij}: هر ده هزار لیتر بنزین ← که روزانه از پالایشگاه i به پمپ بنزین j حمل می گردد.

پالایشگاه \ پمپ بنزین	A	B	C	D
۱	x_{1A}	x_{1B}	x_{1C}	x_{1D}
۲	x_{2A}	x_{2B}	x_{2C}	x_{2D}
۳	x_{3A}	x_{3B}	x_{3C}	x_{3D}

$$\min x_0 = 70x_{1A} + 40x_{1B} + 40x_{1C} + 40x_{1D} + 50x_{2A} + \dots + 40x_{3D}$$

$$\begin{aligned}
s.t:\ & x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}+x_{1D} \leq 8\\
& x_{2A}+x_{2B}+x_{2C}+x_{2D} \leq 10\\
& x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}+x_{3D} \leq 5\\
& x_{1A}+x_{2A}+x_{3A} = 5\\
& x_{1B}+x_{2B}+x_{3B} = 4\\
& x_{1C}+x_{2C}+x_{3C} = 6\\
& x_{1D}+x_{2D}+x_{3D} = 4\\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}$$

ساختار مسائل برنامه ریزی حمل و نقل : ←

$$\min x_0 = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij}$$

St:

$$\sum_i x_{ij} = d_j \quad \forall j$$

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad \forall i$$

$$x_{ij} \geq 0$$

این محدودیت را به مدل اضافه می کنیم

$$\sum_i a_i = \sum_j d_j$$

جدول حمل و نقل ←

x_{1A}

پمپ بنزین / پالایشگاه	A	B	C	D	مجازی	عرضه
۱	۷۰	۶۰	۴۰	۶۰	۰	۸
۲	۵۰	۸۰	۴۰	۷۰	۰	۱۰
۳	۸۰	۵۰	۸۰	۶۰	۰	۵
تقاضا	۵	۴	۶	۴	۴	

۲۳ عرضه
۱۹ تقاضا

نکته مهمی که در تنظیم جدول حمل و نقل حتماً باید مراعات گردد این است که مجموع عرضه با مجموع تقاضا برابر باشد.

برای این منظور، اگر مجموع عرضه بیش از مجموع تقاضا باشد، یک ستون مجازی با هزینه‌های صفر به جدول حمل و نقل افزوده می‌شود به گونه‌ای که تقاضای آن برابر با تفاضل مجموع عرضه و تقاضا باشد ولی اگر مجموع تقاضا از مجموع عرضه بیشتر باشد یک سطر مجازی با هزینه‌های صفر به جدول اضافه خواهد شد.

در حل جدول حمل و نقل، همواره دو مرحله وجود دارد: مرحله اول یافتن حل اولیه و مرحله دوم تبدیل این حل اولیه به حل بهینه می‌باشد.

لازم بذکر است که شدنی بودن یک حل در جدول حمل و نقل بدین معناست که مجموع مقادیر در سطرها و ستون‌ها، عرضه و تقاضای ستون‌ها را برآورده نماید.

از این خانه جدول شروع می کنیم.

توجه به هزینه ها نمی کند.

حل اولیه :

۱) روش گوشهٔ شمال غربی : (North-west Corner)

	A	B	C	D	مجازی	عرضه
۱	۵ (۷۰)	۳ (۴۰)				~~۸~~ ~~۳~~ ۰
۲		۱ (۸۰)	۶ (۶۰)	۳ (۷۰)		~~۱۰~~ ~~۹~~ ~~۳~~ ۰
۳				۱ (۴۰)	۴ (۰)	~~۵~~ ~~۴~~ ۰
تقاضا	~~۵~~ ۰	~~۴~~ ~~۱~~ ۰	~~۶~~ ۰	~~۴~~ ~~۱~~ ۰	~~۴~~	

هزینه حمل ونقل = ۱۲۴۰

۲) روش حداقل هزینه :

	A	B	C	D	مجازی	عرضه
۱	۰ (۷۰)	۰ (۴۰)	۴ (۶۰)	۰ (۶۰)	۴ (۰)	~~A~~ ~~۸~~ ۰
۲	۵ (۵۰)	۰ (۸۰)	۲ (۶۰)	۳ (۷۰)	۰ (۰)	~~۱۰~~ ~~۵~~ ~~۳~~ ۰
۳	۰ (۸۰)	۴ (۵۰)	۰ (۸۰)	۱ (۴۰)	۰ (۰)	~~۵~~ ~~۱~~ ۰
تقاضا	~~۵~~ ۰	~~۴~~ ۰	~~۶~~ ~~۲~~ ۰	~~۴~~ ~~۳~~ ۰	~~۴~~ ۰	

هزینه حمل ونقل = ۱۰۸۰

در این روش ، ابتدا خانه ی با کمترین هزینه را یافته و بیشترین مقدار ممکنه را بسته به میزان عرضه وتقاضای سطر یا ستون مربوطه به آن اختصاص می دهیم. عرضه وتقاضای مربوطه را به هنگام کرده و در ستون یا سطری که فاقد ظرفیت می باشد ، به مابقی خانه ها ، مقدار صفر تخصیص می دهیم. مجدداً خانهٔ با کمترین هزینه را یافته و آنقدر به این فرایند ادامه می دهیم تا تمام خانه ها دارای مقدار باشد.

۳) روش Vogel : مراحل روش Vogel عبارت اند از : ۱) جدول حمل ونقل را با در نظر گرفتن سطر یا ستون مجازی تشکیل دهید. ۲) کمترین هزینه در هر سطر را یافته واختلاف آن با کمترین هزینه بعدی را مقابل آن سطر بنویسید همین کار را عیناً برای ستون ها نیز انجام دهید. ۳) از میان مقادیر بدست آمده در قدم قبل ، بزرگترین آنها و مقدار بدست آمده را در زیر آن ستون بنویسید.

Subject: ۷۷

Date

پمپ بنزین / پالایشگاه	A	B	C	D	مجازی	عرضه					
۱	[۱۷۰]	[۶۰]	[۴۶] 1	[۶۰] ۳	[۰] ۴	~~۸~~ ~~۳~~ ~~۴~~ ۰	۶۰	۰	۰	۰	۰
۲	[۵۰] ۵	[۸۰]	[۴۰] ۵	[۷۰]	[۰]	~~۱۰~~ ۰ ~~۵~~	۵۰	۱۰	۱۰		
۳	[۱۸۰]	[۵۰] ۴	[۸۰]	[۶۰] ۱	[۰]	~~۵~~ ~~۱~~ ۰	۵۰	۱۰	۱۰	۱۰	۰
تقاضا	~~۵~~ ۰	~~۴~~ ۰	~~۶~~ ~~۱~~ ۰	۴	~~۴~~ ۰						
	۲۰	۱۰	۰	۰	۰						
	۲۰	۱۰	۰	۰							
		۱۰	۰	۰							
		۱۰	۲۰	۰							
		۱۰		۰							

۱۰۵۰ = هزینه حمل و نقل

را انتخاب کرده و به کم هزینه ترین خانه در سطر یا ستون مربوطه، بیشترین مقدار ممکن را اختصاص دهید. ۴) مقادیر عرضه و تقاضا را به هنگام کرده و سطر یا ستون فاقد ظرفیت را از ملاحظات بعدی حذف نمایید. ۵) مجدداً به قدم ۲ بازگشته و آنقدر فرآیند را تکرار کنید تا تمام خانه های جدول تکمیل گردد.

- نکته: روش Vogel برای مسائل مینیمم کردن طراحی شده است لذا اگر مسئله اصلی ما ماکزیمم کردن باشد، ضرایب تابع هدف را در منفی ضرب نمایید تا به مینیمم تبدیل شود و سپس از Vogel مسئله را حل کنید.

- جلسه ۲۵ - ۰۲/۱۹ :

PAPCO

u و v نیز هستند.

جلسه ۲۶_۲۱/۲/۹۰:

بالایاد / شیرین	A	B	C	D	مجازی	عرضه
۱	۴ −۵ [۷۰]	۳ +۴ [۶۰]	[۶۰]	[۶۰]	[۰]	۸
۲	۱ +* [۵۰]	۱ −۰ [۸۰]	۶ [۶۰]	۳ [۷۰]	[۰]	۱۰
۳	[۸۰]	[۵۰]	[۸۰]	۱ [۶۰]	۴ [۰]	۵
تقاضا	۵	۴	۶	۴	۴	

$$\min x_0 = 70x_{1A} + 60x_{1B} + 60x_{1C} + \dots + 60x_{3D}$$

$$\begin{array}{ll}
u_1 & St: \; x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}+x_{1D}+x_{1e}=8 \\
u_2 & x_{2A}+x_{2B}+x_{2C}+x_{2D}+x_{2e}=10 \\
u_3 & x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}+x_{3D}+x_{3e}=5 \\
V_1 & x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}=5 \\
V_2 & x_{1B}+x_{2B}+x_{3B}=4 \\
V_3 & x_{1C}+x_{2C}+x_{3C}=6 \\
V_4 & x_{1D}+x_{2D}+x_{3D}=4 \\
V_5 & x_{1e}+x_{2e}+x_{3e}=4 \\
 & x_{ij} \geq 0
\end{array}$$

مزدوج مسئله:

$$\max y_0 = 8u_1 + 10u_2 + 5u_3 + 5V_1 + 4V_2 + 6V_3 + 4V_4 + 4V_5$$

$$\begin{array}{l}
St: \; u_1 + V_1 \leq 70 \\
u_1 + V_2 \leq 60 \\
u_1 + V_3 \leq 60 \\
\vdots \\
u_3 + V_5 \leq 0
\end{array} \Rightarrow u_i + V_j \leq C_{ij}$$

$\boxed{u_i , V_j \text{ آزاد}}$

مراجعه به بخش سیمپلکس تجدید نظر شده

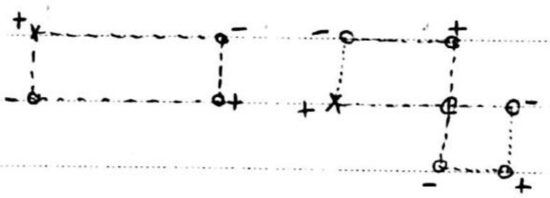
$$\Rightarrow \bar{C}_N = C_{ij} - \underbrace{(u_i + V_j) I}_{C_B B^{-1} N}$$

یا $\bar{C}_{ij}$

	A ($V_1=70$)	B ($V_2=60$)	C ($V_3=40$)	D ($V_4=50$)	مجازی ($V_5=-10$)
$u_1=0$ ۱	۰ [۷۰]	۰ [۶۰]	۲۰ [۶۰]	۱۰ [۶۰]	۱۰ [۰]
$u_2=20$ ۲	−۴۰ [۵۰]	۰ [۸۰]	۰ [۶۰]	۰ [۷۰]	−۱۰ [۰]
$u_3=10$ ۳	۰ [۸۰]	−۲۰ [۵۰]	۳۰ [۸۰]	۰ [۶۰]	۰ [۰]

$$\left(\bar{C}_{ij} = C_{ij} - (u_i + V_j)\right)$$

$$0 = 70 - (u_1 + V_1)$$
$$0 = 60 - (u_1 + V_2)$$



یعنی باید در جدول بالا، مقدار بگیرد.

پس از آنکه، یک حل اولیه برای مسئله حمل و نقل حاصل گردید (با هر یک از روشهایی که قبلاً گفته شد) می‌بایستی ابتدا بررسی نماییم که آیا حل بدست آمده بهینه است یا نه. برای این منظور، جدولی مشابه جدول حمل و نقل ولی بدون در نظر گرفتن عرضه و

و تقاضا را کم می‌کنیم. سطرهای این جدول را u_iها و ستون‌های آن را v_jها می‌نامیم. مقادیر داخل خانه‌های این جدول ($\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$) خواهند بود. به خانه‌هایی در این جدول که معادل خانه‌هایی در جدول اصلی هستند که دارای مقدار می‌باشند، عدد صفر اختصاص می‌دهیم ($\bar{c}$ متغیرهای اساسی مساوی صفر می‌باشد). به یکی از مقادیر u_iها و v_jها به دلخواه مقدار عددی دلخواهی را اختصاص می‌دهیم. با کمک رابطه‌ای که در بالا ارائه گردید و با استفاده از خانه‌هایی که مقدار صفر به آنها داده‌ایم، دیگر مقادیر u_iها و v_jها را بدست می‌آوریم. با کمک این مقادیر، $\bar{c}_{ij}$ خانه‌هایی را که در پایه نیستند، محاسبه می‌کنیم. خانه‌ی با منفی‌ترین $\bar{c}_{ij}$ (برای min کردن) نشان دهنده خانه‌ای است که باید وارد پایه شود.

پس از تعیین خانه‌ای که باید مقدار بگیرد، به این خانه برچسب مثبت زده و یک حلقه بسته را با شروع از این خانه به گونه‌ای ترسیم می‌کنیم که رئوس آن، خانه‌های فعلی جدول باشند که دارای مقدار باشند و برگشت این حلقه مجدداً به خانه‌ی کاندید شده برای ورود به پایه باشد. رئوس این حلقه به ترتیب مثبت و منفی برچسب‌گذاری می‌شوند. از میان خانه‌های با برچسب منفی، کوچکترین آنها را انتخاب نموده، مقدار آن را از مقادیر خانه‌های دارای برچسب منفی کم کرده، به مقادیر خانه‌های دارای برچسب مثبت اضافه می‌کنیم.

برای حل جدید بدست آمده، مجدد آزمون بهینگی را انجام می‌دهیم.

Subject: ۸۰
Date

_ جلسه ۲۷ _ ۲/۲۶ : امتحان میان‌ترم

		v_1 ۰	v_2 -۱۰	v_3 ۱۰	v_4 ۲۰	v_5 -۴۰
u_1	۷۰	۰ [۷۰]	۰ [۴۰]	-۲۰ [۴۰]	-۴۰ [۴۰]	-۳۰ [۰]
u_2	۵۰	۰ [۵۰]	[۸۰]	۰ [۴۰]	۰ [۷۰]	-۱۰ [۰]
u_3	۴۰	۴۰ [۸۰]	۲۰ [۵۰]	۳۰ [۸۰]	۰ [۴۰]	۰ [۰]

	A	B	C	D	مجازی	عرضه
۱	۱ ε- ✱ [۷۰]	۴- [۴۰]	[۴۰]	[۴۰]	✱ + ۳ [۰]	۸
۲	۴ ε+ [۵۰]	[۸۰]	۶ [۴۰]	✱ ε- ۰ [۷۰]	[۰]	۱۰
۳	[۸۰]	[۵۰]	[۸۰]	۴ ✱+ [۴۰]	۴ ✱ -۱ [۰]	۵
تقاضا	۵	۴	۶	۴	۴	

	A	B	C	D	مجازی	عرضه
۱	-۱ ۰ [۷۰]	۴ [۴۰]	✱ +۱ [۴۰]	[۴۰]	۳ [۰]	۸
۲	۴ε ۵ + [۵۰]	[۸۰]	۶ (-۱)۵ [۴۰]	[۷۰]	[۰]	۱۰
۳	[۸۰]	[۵۰]	[۸۰]	۴ [۴۰]	۱ [۰]	۵
	۵	۴	۶	۴	۴	

		v_1 ۷۰	v_2 ۴۰	v_3 ۸۰	v_4 ۴۰	v_5 ۰
u_1	۰	۰ [۷۰]	۰ [۴۰]	-۴۰ [۴۰]	۰ [۴۰]	۰ [۰]
u_2	-۲۰	۰ [۵۰]	۴۰ [۸۰]	۰ [۴۰]	۳۰ [۷۰]	۲۰ [۰]
u_3	۰	۱۰ [۸۰]	-۱۰ [۵۰]	۰ [۸۰]	۰ [۴۰]	۰ [۰]

★ تست انحطاط: $(m+n-1)$

(اگر کمتر بود، حل منحط بود.) حل منحط نیست. ← ۷ خانه مقدار دارد ۷ = (۱ - ۵ + ۳)

_ جلسه ۲۸ _ ۲/۲۸:

_ مثال:

(min Z)

← روش گوشه شمال غربی

	۱	۲	۳	۴	۵	عرضه
A	۷ [۱۰]	[۱۶]	[۱۲]	[۱۰]	[۱۴]	۷
B	۵ [۱۶]	۳ [۱۰]	× ε [۱۲]	[۱۰]	[۱۲]	۸
C	[۱۴]	× [۱۲]	۲ [۱۶]	۶ [۱۶]	α [۱۲]	۸
D	(+) × ε [۱۲]	[۱۰]	[۱۲]	× [۱۶]	۴ ε- (-) [۱۴]	۴
مجازی	(-) ε- [۰]	[۰]	[۰]	[۰]	۵ ε+ (+) [۰]	۵
تقاضا	۱۲	۳	۲	۶	۹	

بررسی تست انحطاط:

$m+n-1 = ۵+۵-۱ = ۹$ اما تنها ۷ خانه مقدار دارد. پس به دو خانه به گونه‌ای مقدار می‌دهیم که با خانه‌های دیگر تشکیل Loop ندهند. (ε′ > ε)

		v_1 ۱۶	v_2 ۱۰	v_3 ۱۲	v_4 ۱۲	v_5 -۱۶
u_1	-۶	۰ [۱۰]	۱۲ [۱۶]	۶ [۱۲]	۴ [۱۰]	۳۶ [۱۴]
u_2	۰	۰ [۱۶]	۰ [۱۰]	۰ [۱۲]	-۲ [۱۰]	۲۸ [۱۲]
u_3	۴	-۶ [۱۴]	-۲ [۱۲]	۰ [۱۶]	۰ [۱۶]	۲۴ [۱۲]
u_4	۳۰	-۳۴ [۱۲]	-۳۰ [۱۰]	-۳۰ [۱۲]	-۲۶ [۱۶]	۰ [۱۴]
u_5	۱۶	۰ [۰]	-۲۶ [۰]	-۲۸ [۰]	-۲۸ [۰]	۰ [۰]

← $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$

		V_1 -۲	V_2 -۸	V_3 -۶	V_4 -۶	V_5 ۰
u_1	۱۲	۰ ۱۰	۱۲ ۱۶	۶ ۱۲	۴ ۱۰	۲ ۱۴
u_2	۱۸	۰ ۱۶	۰ ۱۵	۰ ۱۲	۲ ۱۰	۶ ۱۲
u_3	۲۲	-۶ ۱۴	-۲ ۱۲	۰ ۱۶	۰ ۱۶	-۱۰ ۱۲
u_4	۱۴	۰ ۱۲	۴ ۱۰	۴ ۱۲	۸ ۱۶	۰ ۱۴
u_5	۰	۲ ۰	۸ ۰	۶ ۰	۶ ۰	۰ ۰

	۱	۲	۳	۴	۵
A	۷				
B	(-) ۳ ۵	۳	ε (+) ۲+ε		
C			۰ ۲ (-)	۶	۲ (+)
D	(+) ۲+ε ε				۴ ε (-) ε-۲
مجازی					۵+ε

- تخصیص (Assignement):

- مثال: چهار ساختمان A، B، C و D می‌بایستی توسط چهار پیمانکار ۱، ۲، ۳ و ۴ ساخته شود. مدیریت تصمیم دارد به هر پیمانکار تنها یک ساختمان و هر ساختمان نیز تنها به یک پیمانکار داده شود. از پیمانکاران خواسته شده که پیشنهادات قیمت خود را ارائه دهند. جدول زیر این پیشنهادات را نشان می‌دهد. تعیین نمایید کدام ساختمان به کدام پیمانکار تخصیص داده شود تا مجموع کل هزینه‌ها حداقل شود؟

ساختمان \ پیمانکار	۱	۲	۳	۴
A	۴۸	۴۸	۵۰	۴۴
B	۵۶	۶۰	۶۰	۶۸
C	۹۶	۹۴	۹۰	۸۵
D	۴۲	۴۴	۵۴	۴۶

	۱	۲	۳	۴	عرضه
A	۴۸	۱ ۴۸	۵۰	۴۴	۱
B	۱ ۵۶	۶۰	۶۰	۶۸	۱
C	۹۶	۹۴	۱ ۹۰	۸۵	۱
D	۴۲	۴۴	۵۴	۱ ۴۶	۱
تقاضا	۱	۱	۱	۱	

حل بشدت منحط است. $m+n-1=7$
اما ۴ خانه مقدار گرفته!

← قدم اول: در جدول هزینه‌ها، ابتدا در هر سطر، کوچکترین مقدار آن سطر را از مابقی مقادیر سطر کم کنید، تا یک

Subject: ۸۲

Date

برای min کردن است این الگوریتم را

۱

جدول جدید حاصل شود.

	۱	۲	۳	۴
A	۴	۴	۶	۰
B	۰	۴	۴	۱۲
C	۱۱	۹	۵	۰
D	۰	۲	۱۲	۴

قدم دوم: در جدول بدست آمده در قدم قبل، در هر ستون، کمترین مقدار را یافته، از دیگر مقادیر آن ستون کم می‌کنیم.

	۱	۲	۳	۴	
A	۴	۲	۲	۰	۲
B	۰	۲	۰	۱۲	
C	۱۱	۷	۱	۰	
D	۰	۰	۸	۴	

قدم سوم: کمترین تعداد خطوط افقی و عمودی را که تمامی صفرهای جدول قدم قبل را پوشش می‌دهند، رسم نمایید. اگر تعداد این خطوط کمتر از تعداد سطر یا ستون گردد، به قدم چهار بروید. ولی در صورتی که تعداد این خطوط، برابر تعداد سطر یا ستون شود، به قدم ۵ بروید. قدم چهارم: از بین اعدادی که خطی از آنها عبور نکرده است، کوچکترین مقدار را تعیین نمایید. این مقدار را از اعدادی که خطی از آنها عبور نکرده کم کنید و به اعدادی که در محل تقاطع دو خط قرار دارند اضافه نمایید. به بقیه اعداد کاری نداشته باشید. به قدم ۳ باز گردید.

	۱	۲	۳	۴
A	۳	۱	۱	۰
B	۰	۲	۰	۱۳
C	۱۰	۶	۰	۰
D	۰	۰	۸	۵

تعداد خطوط = ۴ ← تخصیص بهینه است.

قدم پنجم: هنگامی که حداقل تعداد خطوط افقی یا عمودی برابر با تعداد سطر یا ستون گردد به معنای دستیابی به یک تخصیص بهینه است. برای تخصیص بهینه از صفرهای داخل آخرین جدول استفاده نمایید.

$A \to ۴$

$\begin{cases} B \to ۱ \\ B \cancel{\to} ۳ \end{cases}$

$\begin{cases} C \to ۳ \\ C \cancel{\to} ۴ \end{cases}$

$\begin{cases} D \cancel{\to} ۱ \\ D \to ۲ \end{cases}$

→ مجموع هزینه = ۴۴ + ۵۶ + ۹۰ + ۱۴۴ = ۳۳۴

PAPCO

ـ مثال: شرکتی دارای ۵ دستگاه بولدوزر در مکان های مختلف می باشد. این شرکت مایل است به مکان A، B و C هر مکان یک بولدوزر ارسال نماید. جدول زیر هزینه های ارسال را نشان می دهد. مطلوب است تعیین بهترین تخصیص با حداقل هزینه. ـ دانسته روش دیجسترا برای حداقل کردن هزینه ها ارائه شده است. اگر مسئله max کردن باشد، ابتدا همه را در منفی ضرب نمایید و سپس الگوریتم را به کار گیرید.

بولدوزر \ مکان	A	B	C	e_1	e_2
۱	۲	۳	۴	۰	۰
۲	۷	۶	۴	۰	۰
۳	۳	۵	۸	۰	۰
۴	۴	۶	۵	۰	۰
۵	۵	۶	۳	۰	۰

	A	B	C	e_1	e_2
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۲	۵	۳	۱	۰	۰
۳	۱	۲	۵	۰	۰
۴	۲	۳	۲	۰	۰
۵	۳	۳	۰	۰	۰

→

	A	B	C	e_1	e_2
۱	۰	۰	۱	۱	۱
۲	۴	۲	۰	۰	۰
۳	۰	۱	۴	۰	۰
۴	۱	۲	۱	۰	۰
۵	۳	۳	۰	۱	۱

تخصیص بهینه ← حاصل شده است.

$\begin{cases} 1 \not\to A \\ 1 \to B \end{cases}$

$\begin{cases} 2 \not\to C \\ 2 \to e_1 \\ 2 \not\to e_2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3 \to A \\ 3 \not\to e_1 \\ 3 \not\to e_2 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 \not\to e_1 \\ 4 \to e_2 \end{cases}$

$5 \to C$ اگر دو تا بود، خودمان یکی را انتخاب می‌کردیم.

→ مجموع هزینه $= 3 + 3 + 3 = 9$

از آنجایی که در روش تخصیص، تعداد سطر و ستون باید با هم برابر باشند، می توان با استفاده از سطر یا ستون های مجازی با هزینه صفر در صورت لزوم، این برابری را ایجاد نمود.

- جلسه ۲۹ - ۳/۲/۳: تعطیل رسمی

- جلسه ۳۰ - ۳/۲/۴: WINQSB

- مثال:

سود خالص (دهکتار)	آب مصرف (واحد آب بر هکتار)	حداکثر سهمیه (هکتار)	محصول
۴	۳	۱۲۰	چغندر قند (۱)
۳	۲	۱۰۰	پنبه (۲)
۱	۱	۶۵	دانه های روغنی (۳)

سهمیه آب	زمین (هکتار)	شرکت تعاونی
۱۲۰	۸۰	۱
۱۶۰	۱۲۰	۲
۷۵	۶۰	۳

شرکت \ محصول	(۱) چغندر	(۲) پنبه	(۳) دانه های روغنی
۱	x_{11}	x_{12}	x_{13}
۲	x_{21}	x_{22}	x_{23}
۳	x_{31}	x_{32}	x_{33}

$$\max x_0 = 4(x_{11}+x_{21}+x_{31}) + 3(x_{12}+x_{22}+x_{32}) + (x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

st:

زمین
$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 80 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 120 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 60 \end{cases}$$

آب
$$\begin{cases} 3x_{11}+2x_{12}+x_{13} \leq 120 \\ 3x_{21}+2x_{22}+x_{23} \leq 160 \\ 3x_{31}+2x_{32}+x_{33} \leq 75 \end{cases}$$

سهمیه وزارت کشاورزی
$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 120 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 100 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 65 \end{cases}$$

$$\frac{x_{11}+x_{12}+x_{13}}{80} = \frac{x_{21}+x_{22}+x_{23}}{120} = \frac{x_{31}+x_{32}+x_{33}}{60}$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3),\ (j=1,2,3)$$

- جلسه ۳۱ - ۳/۹/۳:

- بهینه‌سازی استوار (Robust optimization):

D_1 و D_2: مقدار تولید از داروی ۱ و ۲ (کیلوگرم)

R_1 و R_2: مقدار مورد نیاز برای مواد اولیه ۱ و ۲ (کیلوگرم)

- مثال: یک کارخانه داروسازی، دو نوع داروی D_1 و D_2 را تولید می‌کند. در این دو نوع دارو از ماده مؤثر A استفاده می‌شود که از طریق مواد اولیه R_1 و R_2 حاصل می‌شود. اطلاعات مربوطه در جدول زیر داده شده است.

$A \to D_1, D_2$ R_1 و R_2

	D_1	D_2
قیمت فروش (واحد پول / کیلوگرم)	۶۲۰۰	۶۹۰۰
ماده مؤثر A (گرم در کیلوگرم)	۰/۵	۰/۶
نیروی انسانی مورد نیاز (ساعت / کیلوگرم)	۹۰	۱۰۰
مصرف تجهیزات (ساعت / کیلوگرم)	۴۰	۵۰
هزینه عملیاتی (واحد پول / کیلوگرم)	۷۰۰	۸۰۰

	قیمت خرید (واحد پول / کیلوگرم)	مقدار مؤثر ماده A (گرم در کیلوگرم)
R_1	۱۰۰	۰/۰۱
R_2	۱۹۹	۰/۰۲

بودجه (واحد پول)	نیروی انسانی (ساعت)	تجهیزات (ساعت)	ظرفیت انبار (Kg)
۱۰۰۰۰۰	۲۰۰۰	۸۰۰	۱۰۰۰

$$\max x_0 = 6200D_1 + 6900D_2 - (100R_1 + 199R_2) - (700D_1 + 800D_2)$$

$$\begin{aligned}
st:\ & R_1 + R_2 \leq 1000 \\
& 90D_1 + 100D_2 \leq 2000 \\
& 40D_1 + 50D_2 \leq 800 \\
& \boxed{0.01R_1 + 0.02R_2 \geq 0.5D_1 + 0.6D_2} \\
& 100R_1 + 199R_2 + 700D_1 + 800D_2 \leq 100000 \\
& R_1, R_2, D_1, D_2 \geq 0
\end{aligned}$$

حل بهینه: $\begin{cases} R_1^* = 0 & R_2^* = 438.79Kg \\ D_2^* = 0 & D_1^* = 17.55Kg \\ x_0^* = 9205.79 \end{cases}$

حل شدن غیر بهینه: $\begin{cases} \bar{R}_2 = 0 & \bar{R}_1 = 877.73Kg \\ \bar{D}_2 = 0 & \bar{D}_1 = 17.467Kg \\ \bar{x}_0 = 8294.5 \end{cases}$

اطلاعات دنیای واقعی:

	محتوای ماده مؤثر A (گرم در کیلوگرم) A
R_1	$0.01 \to \pm 0.5\%$ $[0.00995, 0.01005]$
R_2	$0.02 \to \pm 2\%$ $[0.0196, 0.0204]$

$$0.00995 \times 0 + 0.0196 \times 438.79 \ngeq 0.5 \times 17.55 + 0.6 \times 0$$ ← حل بهینه، نشدنی شد.

جدید $D_1 = 0/98 \times 17/55 = 17/201$ جدید $x_6 = 726/29$ (۲۱٪ کاهش)

$\xrightarrow[\text{شدن در محدودیت}]{\text{جاگذاری حل بهینه غیر}}$ $0/00995 \times 377/73 + 0/0146 \times 0 \geq 0/5 \times 17/467 + 0/6 \times 0$ ✓

→ مصونیت دارد در برابر خطا

→ حل استوار در برابر خطاهای موجود در مدل برنامه ریزی خطی (خطاهای داده های ورودی)

- ماشین حساب برای پایان ترم آورده شود. - سوالات مستقل از هم هستند. (الف و ب و ...)

«پایان»